ELEMENTI
DI ALGEBRA

DEL SIGNOR

S. F. LACROIX

SECONDA EDIZIONE NAPOLETANA FATTA SULL' ULTIMA EDIZIONE DI PARIGI

NAPOLI
DA' TORCHI DI RAFFAELLO DI NAPOLI
Strada Quercia n. 7.
1834.

Alfabeto per facilitare la lettura dei calcoli ove si fa uso delle lettere greche.

Α	α	. . . . . . Alfa
Β	β	. . . . . . Beta
Γ	γ	. . . . . . Gamma
Δ	δ	. . . . . . Delta
Ε	ε	. . . . . . Epsilon
Ζ	ζ	. . . . . . Zeta
Η	η	. . . . . . Eta
Θ	θ ϑ	. . . . Theta
Ι	ι	. . . . . . Iota
Κ	κ	. . . . . . Cappa
Λ	λ	. . . . . . Lambda
Μ	μ	. . . . . . Mu
Ν	ν	. . . . . . Nu
Ξ	ξ	 Xi
Ο	ο	. . . . . . Omicron
Π	π	. . . . . . Pi
Ρ	ρ	. . . . . . Rho
Σ	ς	. . . . . . Sigma
Τ	τ	. . . . . . Tau
Υ	υ	. . . . . . Upsilon
Φ	φ	. . . . . . Phi
Χ	χ	. . . . . . Chi
Ψ	ψ	. . . . . . Psi
Ω	ϖ	. . . . . Omèga

TAVOLA

ELEMENTI D' ALGEBRA

Nozioni preliminari sopra il passaggio dell' ARITMETICA all' ALGEBRA; spiegazione, ed uso de' segni algebrici.

1. Abbiamo dovuto osservare nel *Trattato elementare d' Aritmetica* più Problemi, la cui soluzione è composta di due parti; una, che ha per fine di cercare a quali delle quattro *operazioni fondamentali* si rapporta la determinazione del numero incognito per mezzo dei numeri dati; l' altra l' applicazione di quelle operazioni. La prima parte indipendente da qualunque maniera di scrivere i numeri, o da qualunque sistema di numerazione, si aggira interamente sullo sviluppo delle conseguenze, che resultano esplicitamente, e implicitamente dall'enunciato, o dal modo col quale quest'enunciato lega i numeri cogniti coi numeri incogniti, cioè a dire s'occupa delle relazioni, che stabilisce tra questi numeri. In generale si può, se queste relazioni non son complicate, trovare col semplice ragionamento il valore dei numeri incogniti. Bisogna per questo decomporre le condizioni, che in se contengono le relazioni enunciate, traducendo queste relazioni in una serie di frasi equivalenti, l' ultima delle quali debb' essere concepita in questi termini: *L' incognita eguaglia la somma*, o *la differenza*, o *il prodotto*, o *il quoziente delle tali e tali grandezze*. L' esempio seguente schiarirà ciò che queste nozioni generali possono contenere di oscuro.

Dividere un numero dato in due parti tali che la prima sorpassi la seconda d'un eccesso dato.

Per arrivarvi si osserverà 1.° che

La parte maggiore è eguale alla minore, più l'eccesso dato, e che per conseguenza, se la parte minore fosse cognita, aggiungendole quest' eccesso se n' avrebbe la maggiore.

2.° che

La parte maggiore unita alla minore formano il numero da dividersi.

Sostituendo in quest' ultima frase alle parole, *la parte maggiore*, l' espressione equivalente riportata qui sopra, cioè, *la parte minore, più l' eccesso dato*, si trova che

La parte minore , più l' eccesso dato , più ancora la parte minore formano il numero da dividersi.

Ma allora la frase può essere abbreviata enunciandola così:

Due volte la parte minore unita con l' eccesso dato formano il numero da dividersi ;

e se ne conclude necessariamente che

Due volte la parte minore è eguale al numero da dividersi , diminuito dell' eccesso dato :

dunque

Una volta la parte minore è eguale alla metà della differenza tra il numero da dividersi , e l' eccesso dato ;

Ovvero , il che torna lo stesso ,

La parte minore è eguale alla metà del numero da dividersi , meno la metà dell' eccesso dato.

Ecco dunque risoluto il Problema proposto , poichè , per ottenere le parti cercate, serve far delle operazioni puramente aritmetiche sopra dei numeri cogniti.

Se , per esempio , il numero da dividersi fosse 9 , e l' eccesso della parte maggiore sulla minore 5 , la parte minore sarebbe , secondo la regola spiegata , eguale a $\frac{9}{2}$ meno $\frac{5}{2}$, ovvero a $\frac{4}{2}$, o finalmente a 2 ; e la maggiore composta della minore più l' eccesso 5, sarebbe eguale a 7.

2. I ragionamenti semplicissimi nel Problema proposto qui sopra , ma complicatissimi in altri , componendosi , in generale d' un certo numero di espressioni , tali come *aggiunto ad* , *diminuito di* , *è eguale ad* , ec. , ripetute frequentemente , e dipendenti dalle operazioni , per le quali le grandezze , che entrano nell' enunciato del Problema , son legate tra loro , è chiaro che si abbrevierebbero molto rappresentando ciascuna di queste espressioni con un segno ; e ciò si fa nel modo, che segue :

Per indicare la somma , si fa uso del segno $+$, che significa *più*.

Per la sottrazione , si adopera il segno $-$, che significa *meno*.

Per la moltiplicazione si usa il segno $\times$, che significa *moltiplicato per*.

Per indicare che due quantità deggiono esser divise l' una per l' altra, si pone la seconda sotto la prima , e si separano con una linea : $\frac{5}{4}$ significa *5 diviso per 4*.

Finalmente, per indicare che due quantità sono eguali, si pone tra le loro espressioni il segno $=$, che significa *eguale*.

Queste abbreviazioni, benchè di già considerabilissime, non sono ancora bastanti, poichè siamo obbligati di ripetere spesso il *numero da dividersi*, *il numero dato ec.*, *la parte minore*, *il numero cercato*, *ec.*; ciò che allunga molto la frase. A riguardo delle quantità date, l' espediente, che si è offerto a prima vista, è stato di prendere, per rappresentarle, dei numeri determinati, che servan d' esempio, come n' abbiamo fatto uso in Aritmetica; ma la cosa non essendo possibile a riguardo dei numeri incogniti, fu ad essi sostituito un segno di convenzione, il quale ha variato col tempo. Finalmente è stato convenuto d' impiegare le lettere dell' Alfabeto; quasi sempre ci serviamo dell' ultime, come in Aritmetica si mette un x per il quarto termine di una Proporzione, della quale non si conoscano che i tre primi: dall' uso di questi segni ne resulta l' *Algebra*.

Con questo mezzo vado a riprendere il Problema del n.° 1., e rappresenterò l' incognita, o il numero minore con una lettera, x, per esempio, il numero da dividersi, e l' eccesso dato coi due numeri 9, e 5; la maggiore delle parti cercate sarà espressa da $x+5$, e la loro somma da $x+5+x$: si avrà dunque

$$x+5+x=9;$$

ma scrivendo $2x$ pel doppio della quantità x, ne resulterà

$$2x+5=9.$$

Quest' espressione mostrando che bisogna aggiunger 5 al numero $2x$ per aver 9, ne concluderò che $2x=9-5$, ovvero che $2x=4$, e che finalmente $x=\frac{4}{2}=2$.

Confrontando adesso ciò che significano le frasi abbreviate, che ho scritte per mezzo dei segni convenuti, con quelle, che mi hanno condotto alla soluzione col solo ragionamento, si vedrà che le une non sono che la traduzione dell' altre.

Il numero 2, resultato delle operazioni precedenti, non conviene che all' esempio particolare, che ho scelto, laddovechè il solo ragionamento insegnandoci che *la parte minore è eguale alla metà del numero da dividersi, meno la metà dell' eccesso dato*, fa vedere come il numero incognito si compone coi numeri dati, e somministra una regola, per mezzo della quale si posson risolvere tutti i casi particolari compresi nel Problema enunciato.

Questo vantaggio del ragionamento, impiegato solo, dipende da ciò, che non indicando alcun numero in particolare, i nu-

meri dati passano senz' alterazione da una frase all' altra, mentre che considerando dei numeri determinati, si effettuano, a misura che si presentano, tutte le operazioni sopra questi numeri; e quando siamo arrivati al resultato, non resta alcuna traccia del come il numero 2, al quale si può arrivare con una infinità di operazioni differenti, è stato formato per mezzo dei numeri dati 9, e 5.

3. Si eviteranno questi inconvenienti rappresentando *il numero da dividersi*, e *l' eccesso dato* con dei caratteri indipendenti da qualunque valore particolare, e sopra i quali non si possa per conseguenza effettuare alcun calcolo. Le *lettere* dell' Alfabeto sono adattatissime a quest' uso, ed il Problema proposto può col mezzo loro enunciarsi così:

Dividere un numero cognito, rappresentato per a, *in due parti tali, che la maggiore abbia sulla minore un eccesso dato, rappresentato per* b.

Indicando la parte minore per x,

La maggiore sarà espressa da $x+b$.

La loro somma, o il numero da dividersi, sarà equivalente ad $x+b+x$, ovvero a $2x+b$.

La condizione del Problema darà dunque

$$2x+b=a.$$

Adesso egli è manifesto che, se bisogna aggiungere al doppio di x, o a $2x$ la quantità b per fare la quantità a, ne resulta che bisogna diminuire a di b per ottenere $2x$, e che per conseguenza $2x=a-b$.

Da ciò si concluderà che la metà di $2x$, ovvero $x=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$.

Quest' ultimo resultato essendo tradotto nel linguaggio ordinario mediante la sostituzione delle parole, e delle frasi, che sono indicate dalle lettere, e dai segni ch' esso contiene, somministra la regola trovata qui sopra, secondo la quale, *per conseguir la minore delle parti cercate, si dee dalla metà del numero da dividersi, o da* $\frac{a}{2}$, *togliere la metà dell' eccesso dato, o* $\frac{b}{2}$.

Conoscendo la parte minore, se n'avrà la maggiore con aggiungere alla minore l' eccesso dato. Questa osservazione è sufficiente per terminar di risolvere il Problema proposto; ma l' Algebra dà di più: essa somministra una regola per calcolare la parte maggiore senza il soccorso della minore, ed ecco come: $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$

essendo il valor di quest' ultima ; aumentandolo dell'eccesso b si avrà per la parte maggiore $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+b$; ora $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+b$ esprime che, dopo aver tolta da $\frac{a}{2}$ la metà di b, bisogna aggiungere al resto il b tutto intero, ovvero due metà di b; il che si riduce ad aumentare $\frac{a}{2}$ d'una metà di b, ovvero di $\frac{b}{2}$. È evidente da ciò che $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+b$ si riduce ad $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$; e traducendo quest' espressione si comprende che *la maggiore delle due parti cercate è uguale alla metà del numero da dividersi più la metà dell' eccesso dato.*

Nel Problema particolare, di cui mi sono occupato in primo luogo, il numero da dividersi era 9, l' eccesso di una parte sopra l'altra 5; per risolverlo con le regole, alle quali sono adesso arrivato, bisognerà effettuare sopra i numeri 9, e 5 le operazioni indicate sopra a, e b.

La metà di 9 essendo $\frac{9}{2}$, e quella di 5 essendo $\frac{5}{2}$, si avrà per la parte minore

$$\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=\frac{4}{2}=2,$$

per la maggiore

$$\frac{9}{2}+\frac{5}{2}=\frac{14}{2}=7.$$

4. Ho indicato qui sopra per x la minore delle due parti, e n'ho dedotta la maggiore; se si volesse cercare immediatamente quest'ultima, si osserverebbe che, rappresentandola per x, l' altra sarebbe $x-b$; poichè si passa dalla maggiore alla minore togliendo l' eccesso della prima sulla seconda. Il numero da dividersi sarebbe allora espresso da $x-b+x$, ovvero per $2x-b$, e s' avrebbe per conseguenza

$$2x-b=a.$$

Questo resultato fa vedere che $2x$ sorpassa la quantità a della quantità b, e che in conseguenza $2x=a+b$. Prendendo la metà di $2x$, e della quantità che gli è eguale per avere il valore di x, si ottiene

$$x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2};$$

il che dà, per calcolar la maggior delle due parti cercate, la medesima regola che qui sopra. Non mi tratterrò a dedurne l'espressione della minore.

La stessa relazione tra dei numeri dati, e dei numeri incogniti può essere enunciata in più maniere differentissime; quella, che ha condotto allo scioglimento del precedente Problema, resulta ancora dell'enunciato, che segue.

Conoscendo la somma a *di due numeri, e la lor differenza*, b, *trovare ciascuno di questi numeri*; poichè in altri termini, il numero da dividersi è la somma delle due parti cercate, e la lor differenza è l'eccesso della maggiore sulla minore. Questo cangiamento nei termini dell' enunciato essendo applicato alle regole trovate di sopra, esse danno:

Il minor dei due numeri cercati è eguale alla metà della loro somma, meno la metà della lor differenza;

Il maggiore è eguale alla metà della loro somma, più la metà della lor differenza.

5. Ecco un Problema analogo al precedente, ma un poco più complicato.

Dividere un numero dato in tre parti tali, che l' eccesso della media sulla minore sia un numero dato, e l' eccesso della maggiore sulla media sia un altro numero dato.

Per fissare le idee, darò primieramente ai numeri cogniti dei valori determinati.

Supporrò che il numero da dividersi sia 230;

Che l' eccesso della parte media sulla minore sia 40;

Che l' eccesso della parte *maggiore* sulla *media* sia 60.

Indicando la parte minore con x,

La media sarà la minore più 40, ovvero $x+40$,

E la maggiore sarà la media più 60, ovvero $x+40+60$.

Ora, le tre parti unite insieme debbono fare il numero da dividersi; dunque

$$x+x+40+x+40+60=230.$$

E riunendo da una parte i numeri dati, e dall' altra il numero incognito, x si troverà 3 volte nel resultato, e per abbreviare, si scriverà

$$3x+140=230.$$

Ma poichè bisogna aggiungere 140 al triplo di x per fare 230, ne segue che togliendo 140 da 230 si avrà precisamente il triplo di x, ovvero

$$3x=230-140,$$

oppure

$$3x=90;$$

e ne segue da ciò che $x=\frac{90}{3}$, ovvero $=30$;

Aggiungendo a 30 l'eccesso 40 della media sulla parte minore, si avrà 70 per la parte media.

Ed aggiungendo a 70 l'eccesso 60 della parte maggiore sulla media, si avrà 130 per la parte maggiore.

6. Se i numeri cogniti fossero differenti da quelli indicati nell'enunciato, si risolverebbe pure il Problema seguendo il metodo tenuto nel paragrafo precedente; ma si sarebbe obbligati a ripetere tutti i ragionamenti, e tutte le operazioni, per mezzo delle quali siamo arrivati al numero 30, poichè nulla ci fa vedere come questo numero si formi per mezzo dei numeri dati, 230, 40, e 60. Per rendere la soluzione indipendente dai valori particolari dei numeri, e far vedere come il valor dell'incognita si forma per mezzo delle quantità cognite, enuncierò adesso il Problema nel modo seguente.

Dividere un numero dato a *in tre parti tali che l'eccesso della media sulla minore sia un numero dato* b, *e l'eccesso della maggiore sulla media sia un numero dato* c.

Denotando, come qui sopra, per x la quantità incognita, e scrivendo, per mezzo dei segni convenuti, e dei simboli a, b, c, che rappresentano le quantità cognite del Problema, i ragionamenti fatti precedentemente sopra i numeri, si formerà di nuovo.

la parte minore x,
la media $x+b$,
la maggiore $x+b+c$;

e la riunione di queste tre parti componendo il numero da dividersi, bisognerà che

$$x+x+b+x+b+c=a.$$

Questa espressione, per quanto sia semplice, può ancora abbreviarsi; poichè, siccome essa fa vedere che x entra tre volte nel numero da dividersi, e che b vi entra due volte, in vece di $x+x+x$ scriverò $3x$, in vece di $+b+b$ scriverò $2b$, e si otterrà

$$3x+2b+c=a.$$

Quest'ultima espressione fa conoscere che bisogna aggiungere al triplo del numero rappresentato da x il doppio del numero rappresentato da b, ed oltre a ciò il numero rappresentato da c per formare il numero a; laonde, se dal numero a si toglie il doppio del numero b, e poi ancora il numero c, si avrà precisamente il triplo di x, ovvero che

$$3x=a-2b-c:$$

ora, x essendo il terzo di tre volte x, ovvero di $3x$, se ne concluderà che

$$x=\frac{a-2b-c}{3}.$$

Bisogna ben osservare che non avendo assegnato alcun valore particolare ai numeri rappresentati da a, b, c, neppure il resultato, cui sono giunto, dà alcun valore particolare per x; esso indica solamente quali operazioni bisogna fare sopra questi numeri allorquando si assegna loro un valore per dedurne quello del numero incognito.

Infatti, l' espressione $\frac{a-2b-c}{3}$, alla quale x è eguale, può esser tradotta nel linguaggio ordinario scrivendo, in luogo delle lettere, la denominazione dei numeri cogniti, che esse rappresentano, ed in vece dei segni l'enunciazione delle operazioni, che essi indicano; formeremo così questa frase:

Dal numero da dividersi togliete il doppio dell' eccesso della parte media sulla minore, ed oltracciò l'eccesso della maggiore sulla media, e prendete il terzo del resto.

E seguendo questa frase letteralmente, si determinerà, mediante le prime operazioni dell' Aritmetica, la parte minore. Il numero da dividersi essendo, per esempio, 230, gli eccessi 40, e 60, come nel numero antecedente, si toglierà da 230 due volte 40, ovvero 80, e 60, resterà 90, il cui terzo sarà 30, come di già l' abbiamo trovato.

Se il numero da dividersi fosse 520, i due eccessi 50, e 120; si toglierebbe da 520 due volte 50, ovvero 100, e 120, resterebbe 300, il cui terzo, ovvero 100, sarebbe la parte minore; si troverebbero le altre due aggiungendo 50 a 100, il che farebbe 150; poscia aggiungendo 120 a questo resultato, ne verrebbe 270; così le tre parti domandate sarebbero

100, 150, 270,

e la loro somma sarebbe 520, come esige il Problema.

Ecco perchè i resultati Algebrici altro non sono ordinariamente che l' indicazione delle operazioni da affettuarsi sopra dei numeri per trovarne degli altri; tali resultati in generale si chiamano *Formule.*

Questo Problema, benchè più complicato di quello del n.° 1., può ancora essere risoluto col linguaggio ordinario; ciò rendesi manifesto dalla qui annessa Tavola, ove di fronte a ciascun ragionamento si è posta la sua traduzione in caratteri Algebrici. L' esame attento di questa Tavola non dee lasciare alcun dubbio sull' utilità dell' Algebra, e sopra le circostanze della sua invenzione.

PROBLEMA

Dividere un numero in tre parti tali che l' eccesso della media sulla minore sia un numero dato, e che l' eccesso della maggiore sulla media sia un altro numero dato.

SOLUZIONE

Con Linguaggio ordinario.	*Con la Scrittura algebrica.*
	Sia il numero da dividersi denotato per a. L' eccesso della parte media sulla minore per . . . . b. L' eccesso della maggiore sulla media per . . . . c. La minore essendo . . . . x.
La parte media sarà la minore, più l'eccesso della media sulla minore.	La media sarà $x+b$.
La parte maggiore sarà la media, più l' eccesso della maggiore sulla media.	La maggiore $x+b+c$.
Le tre parti riunite insieme formano il numero proposto.	
Dunque la parte minore, più la parte minore, più l' eccesso della media sulla minore, più ancora la parte minore, più l'eccesso della media sulla minore, più l' eccesso della maggiore sulla media, eguagliano il numero da dividersi:	Dunque $x+x+b+x+b+c = a$;
Dunque tre volte la parte minore, più due volte l'eccesso della media, sulla minore, più ancora l' eccesso della maggiore sulla media, eguagliano il numero da dividersi:	$3x+2b+c = a$;
Dunque tre volte la parte minore eguaglia il numero da dividersi, meno due volte l' eccesso della media sulla minore, e meno ancora l' eccesso della maggiore sulla media:	$3x = a-2b-c$;
Dunque finalmente la parte minore è eguale al terzo di quello che resta dopo che si è tolto dal numero da dividersi due volte l' eccesso della media sulla minore, ed oltracciò l' eccesso della maggiore sulla media.	$x = \frac{a-2b-c}{3}$.

7. I segni convenuti nel numero 2. non sono i soli, di cui ci serviamo in Algebra; nuove considerazioni in seguito ne introdurranno dei nuovi. Abbiamo di già dovuto osservare che ho indicata nel num.° 2. la moltiplicazione di x per 2, e nei num. 5. e 6. quella di x per 3, quella di b per 2, ponendo solamente queste cifre avanti delle lettere x, e b, senza alcuna interposizione di segno, e così ne farò uso d'ora in avanti; di maniera che ogni numero posto alla sinistra di una lettera sarà moltiplicatore del numero, che rappresenta questa lettera: $5x$, $5a$, ec. indicheranno 5 volte x, cinque volte a, ec.; $\frac{3}{4}x$, ossia $\frac{3x}{4}$, ec. indicherà $\frac{3}{4}$ di x, ovvero 3 volte x diviso per 4, ec.

In generale la moltiplicazione s'indicherà da ora in poi ponendo i fattori in seguito gli uni degli altri, senza alcuna frapposizione di segno, ogni volta che non ne resulterà confusione.

Così le espressioni ax, bc, ec. saranno equivalenti ad $a \times x$, $b \times c$, ec. Ma non si potrà sopprimere il segno $\times$ allorchè si tratterà di numeri, perchè allora l'espressione 3×5, il cui valore è 15, divenendo 35 per l'omissione del segno $\times$, cangerebbe interamente di significato. In questo caso si suole anche sostituire spesso un punto al segno $\times$, e si scrive 3. 5.

Delle Equazioni.

8. Esaminando attentamente la soluzione dei Problemi dei numeri 3. e 6. la troveremo composta di due parti assai bene distinte. Nella prima si esprimono, per mezzo dei caratteri algebrici, le relazioni, che l'enunciato del Problema stabilisce tra le quantità cognite e le quantità incognite; e ciò conduce ad eguagliare due quantità tra di loro, cioè:

Nel num.° 3. le quantità $2x+b$, ed a.

Nel num.° 6. le quantità $3x+2b+c$, ed a.

Poi da questa eguaglianza si deducono una serie di conseguenze, che conducono finalmente ad eguagliare l'incognita x ad una riunione di quantità date connesse tra loro per mezzo di operazioni, che si sanno eseguire: ecco la seconda parte della soluzione.

Le due parti, che ho pocanzi indicate, si trovano in quasi tutti i Problemi, che son d'attenenza dell'Algebra. È difficile dare, almen per adesso, una regola, secondo la quale si possa effettuare la prima parte, quella, cioè, che ha per oggetto la

traduzione in caratteri algebrici delle condizioni del Problema. Bisogna, per riuscirvi, familiarizzarsi colla scrittura algebrica, ed acquistar l' abitudine di decomporre l' enunciato di un Problema in tutte le sue circostanze, sì esplicite, che implicite. Ma allorchè siamo arrivati a formare i due numeri, che il Problema suppone eguali tra loro, abbiamo dei metodi per dedurre da quest' espressione algebrica il valor dell' incognita; il che forma l' oggetto della seconda parte della soluzione. Prima di farli conoscere spiegherò qualche denominazione, di cui gli Algebristi si servono per questo oggetto.

Un' *Equazione* è l' eguaglianza di due quantità.

L' unione delle quantità, che sono da una medesima parte del segno $=$, si chiama *membro*; un' equazione ha due *membri*.

Quello, ch' è a sinistra, si dice il *primo membro*; l' altro è il *secondo*.

Nell' Equazione $2x+b=a$, $2x+b$ è il *primo membro*; a il *secondo membro*.

Le quantità, che compongono un medesimo membro, allorchè esse son separate dai segni $+$, o $-$, si chiamano *termini*.

Così il primo membro dell' equazione $2x+b=a$ contiene due termini, cioè $2x$, e $+b$.

L' equazione $\frac{3}{4}x+7=8x-12$ ha due termini in ciascun de' suoi membri, cioè

$\frac{3}{4}x$, e $+7$ nel primo,
$8x$, e -12 nel secondo.

Benchè io abbia preso a caso, e per servir d' esempio, l'equazione $\frac{3}{4}x+7=8x-12$, la medesima debb' essere considerata nello stesso modo che tutte l' altre, delle quali parlerò in appresso, come proveniente da un Problema, di cui si può trovar sempre un enunciato traducendo in linguaggio ordinario l' equazione proposta. Quella di cui si tratta, si riduce a

Trovare un numero x *tale che aggiungendo* 7 *ai* $\frac{3}{4}$ *di* x, *la somma sia eguale a* 8 *volte* x, *meno* 12.

Parimente l' equazione $ax+bc-cx=ac-bx$, nella quale, le lettere a, b, c, rappresentano delle quantità cognite, corrisponde al Problema seguente.

Trovare un numero x *tale che moltiplicandolo per un numero dato* a, *poi aggiungendovi il prodotto de' due numeri dati* b, *e* c, *e togliendo da questa somma il prodotto del numero dato* c *per il numero* x, *abbiasi un resultato eguale al prodotto dei numeri* a, *e* c, *diminuito di quello dei numeri* b, *ed* x.

Coll' esercitarsi molto a passare dal linguaggio ordinario alla scrittura algebrica, e da questa ritornare al primo, si arriverà a familializzarsi coll' Algebra, la cui difficoltà non consiste in altro se non che nella perfetta intelligenza dei segni, e nell' impiego de' medesimi

Ricavare da un' equazione il valore dell' incognita, ovvero arrivare ad aver questa incognita sola in un membro, e quantità tutte cognite nell' altro, egli è ciò che si dice *risolvere* questa equazione.

I diversi Problemi, che si possono aver da risolvere, conducendo ad equazioni più, o meno composte, si son divise queste in più classi, o *gradi*. Vado ad occuparmi primieramente delle *equazioni di primo grado*. Si chiamano così le equazioni, nelle quali le incognite non sono moltiplicate nè per loro stesse, nè fra di loro.

Della risoluzione dell' Equazioni di primo grado ad una sola incognita.

9. Abbiamo di già veduto che risolvere un' equazione vuol dire arrivare ad una espressione, nella quale l' incognita sola in un membro sia eguagliata a quantità cognite, nell'altro membro combinate tra loro per mezzo di operazioni, che si sappiano effettuare. Segue da ciò che bisogna, per condurre un' equazione a questo stato, *liberare* l' incognita delle quantità cognite, con le quali essa si trova combinata: ora l' incognita può trovarsi combinata in tre maniere diverse colle quantità cognite:

1.° Per addizione, e sottrazione, come nelle equazioni

$$x+5=9-x,$$
$$a+x=b-x;$$

2.° Per addizione, sottrazione, e moltiplicazione, come nell' equazioni

$$7x-5=12+4x,$$
$$ax-b=cx+d;$$

3.° Finalmente per addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione, come nell' equazioni

$$\frac{5x}{3}+8=\frac{11}{12}x+9,$$

$$\frac{ax}{b}+cx-d=\frac{mx}{n}+\frac{p}{q}.$$

Si libera l' incognita delle addizioni, e sottrazioni, ov' essa entra con delle quantità cognite, riunendo in un sol membro tutti i termini ove la medesima si trova; e per questo bisogna sapere far passare un termine da un membro nell' altro.

10. Per esempio, nell' equazione

$$7x-5=12+4x$$

bisogna far passare il termine $4x$ dal secondo membro nel primo, ed il termine -5 dal primo nel secondo. Per questo dob-

biamo osservare che, scancellando $+4x$ nel secondo membro, si vien questo a diminuire della quantità $4x$, e che bisogna operare la medesima sottrazione nel primo membro, per conservar l'eguaglianza di questi due membri: scriveremo dunque $-4x$ nel primo membro, che diverrà $7x-5-4x$, ed avremo

$$7x-5-4x=12.$$

Scancellare -5 dal primo membro vuol dire sopprimere la sottrazione indicata di 5 unità, ed in conseguenza vuol dire aumentare questo membro di 5 unità; dobbiamo dunque, per conservar l'eguaglianza, aumentar pure il secondo membro di 5 unità, ovvero scrivere $+5$ in questo membro, il quale diventerà $12+5$, ed avremo

$$7x-4x=12+5.$$

Ed effettuando le operazioni indicate, ne resulterà l'equazione

$$3x=17.$$

Da questi ragionamenti, che possono applicarsi a qualunque esempio che sia, si vede che scancellando in un membro un termine affetto dal segno $+$, il quale per conseguenza aumentava questo membro, bisogna sottrar questo termine dall'altro membro, ossia scriverlo col segno $-$; che al contrario, quando il termine, che si scancella, ha il segno $-$, siccome con la sua presenza diminuiva il membro dov'egli era, bisogna aumentar l'altro membro del medesimo termine, ovvero scriverlo in quest'ultimo col segno $+$. Concluderemo da ciò questa regola generale:

Per far passare un termine qualunque di una equazione da un membro nell' altro, bisogna scancellarlo nel membro ove egli si trova, e scriverlo nell' altro con un segno contrario a quello, che esso aveva in principio.

Per metter questa regola in pratica, bisogna fare attenzione che il primo termine di ciascun membro, quando non è preceduto da alcun segno, s'intende che egli abbia il segno $+$. Passando dunque il termine cx dell'equazione letterale $ax-b=cx+d$ dal secondo membro nel primo, s'avrà

$$ax-b-cx=d;$$

passando poi il termine $-b$ dal primo membro nel secondo, verrà

$$ax-cx=d+b.$$

11. Per mezzo della regola precedente si posson primieramente riunire in un dei membri tutti i termini affetti dall'incognita, e nell'altro tutte le quantità cognite; e sotto questa forma, il membro, dove si trova l'incognita, può sempre decomporsi in due fattori, uno de' quali non contiene che delle quantità cognite, e l'altro è la sola incognita.

Questa simplificazione si presenta da se stessa tutte le volte che l'equazione proposta è numerica, e che essa non contiene

frazioni, perchè allora tutti i termini affetti dall'incognita si riducono a un solo. Se s'avesse, per esempio, $10x+7x-2x=25+7$, effettuando le operazioni indicate su ciascun membro, si troverebbe successivamente.

$$17x-2x=32,$$
$$15x=32;$$

e siccome $15x$ si decompone nei due fattori 15, ed x, si avrebbe dunque il fattore incognito x dividendo per lo fattore cognito 15 il numero 32, eguale al prodotto $15x$; d'onde deriva

$$x=\frac{32}{15}.$$

La decomposizione si fa nella stessa maniera nelle equazioni letterali simili alla seguente

$$ax=bc;$$

perchè il termine ax indica immediatamente il prodotto di a per x; e se ne conclude

$$x=\frac{bc}{a}.$$

Sia adesso l'equazione

$$ax-bx+cx=ac-bc,$$

che contiene tre termini affetti dall'incognita. Poichè ax, bx, cx rappresentano i prodotti respettivi di x per le quantità a, b, c, l'espressione $ax-bx+cx$ tradotta in linguaggio ordinario, dà questa frase.

Primieramente da x *preso tante volte, quante unità sono in* a, *togliete tante volte* x, *quante son le unità che sono in* b, *ed aggiungete al resultato la medesima quantità* x *presa tante volte, quante unità sono in* c.

Segue da ciò che in totalità l'incognita x si trova presa tante volte, quante unità vi sono nella differenza dei numeri a, e b aumentata del numero c, vale a dire tante volte quanto l'indica il numero $a-b+c$; i due fattori del primo membro sono per conseguenza $a-b+c$, ed x: si ha dunque

$$x=\frac{ac-bc}{a-b+c}.$$

Questo ragionamento, che può applicarsi a qualunque altro esempio, ci dimostra che, *dopo la riunione in un sol membro dei diversi termini contenenti l'incognita, il fattore, che moltiplica quest' incognita, si forma di tutte le quantità, che la moltiplicano isolatamente, riunite coi segni, dai quali esse son precedute; e si ottiene l'incognita dividendo il membro tutto cognito per il fattore, di cui si tratta.*

Dietro a questa regola l'equazione $ax-3x=bc$ dà

$$x=\frac{bc}{a-3}.$$

Parimenti l'equazione $x+ax=c-d$ conduce ad

$$x=\frac{c-d}{1+a};$$

imperocchè bisogna osservare che la lettera x essendo sola, debb' essere riguardata come moltiplicata per l'unità. Si vede d'altronde che in $x+ax$, l'incognita si trova contenuta una volta di più che in ax, ed è per conseguenza moltiplicata $1+a$.

12. È manifesto che se tutti i termini dell'equazione contenessero un fattore comune, si potrebbe sopprimere questo fattore senza turbar l'eguaglianza; poichè non si farebbe che dividere per un medesimo numero tutte le parti delle due quantità, che si suppongono eguali tra loro.

Sia, per esempio, l'equazione

$$6abx-9bcd=12bdx+15abc.$$

Osservo primieramente che i numeri 6, 9, 12, e 15 son divisibili per 3, e sopprimendo questo fattore, non farò che prendere il terzo di tutte le quantità, che formano l'equazione; avrò dopo questa riduzione,

$$2abx-3bcd=4bdx+5abc.$$

Osservo in seguito che la lettera b, combinata in ciascun termine per via di moltiplicazione, indica un fattor comune a tutti questi termini; sopprimerò dunque anche questa, e verrà

$$2ax-3cd=4dx+5ac.$$

Ed applicando a quest'ultima equazione le regole de' num. 10 e 11, ricaverò successivamente.

$$2ax-4dx=5ac+3cd,$$

$$x=\frac{5ac+3cd}{2a-4d}.$$

13. Passo adesso alle equazioni, i cui termini hanno dei divisori; si potrebbero applicar ad esse immediatamente le regole precedenti tutte le volte che l'incognita non entra nei denominatori; ma è spesso più semplice ridurre tutti i termini allo stesso denominatore, il quale può sopprimersi in seguito.

Sia, per esempio, l'equazione

$$\frac{2x}{3}+4=\frac{4x}{5}+12-\frac{5x}{7}.$$

Osserverò che l'Aritmetica dà delle regole per ridur le frazioni al medesimo denominatore, per convertire degl'interi in

frazioni di una specie data (*Aritm.* 69, 67), e trasformerò mercè queste regole in frazioni del medesimo denominatore tutti i termini dell'equazione proposta.

E cominciando primieramente dalle frazioni, che sono

$$\frac{2x}{3},\quad \frac{4x}{5},\quad \frac{5x}{7},$$

le cangerò, per la prima delle citate regole in

$$\frac{5\times7\times2x}{3\times5\times7},\quad \frac{3\times7\times4x}{3\times5\times7},\quad \frac{3\times5\times5x}{3\times5\times7},$$

dipoi. per convertire gl'interi 4, e 12 in frazioni, altro non si dovrà fare, che moltiplicarli per il denominatore comune delle frazioni, cioè, per $3\times5\times7$, e si avrà

$$3\times5\times7\times4,\quad 3\times5\times7\times12.$$

Rimettendo in seguito tutti questi termini nell'equazion proposta, essa diverrà

$$\frac{5\times7\times2x}{3\times5\times7}+\frac{3\times5\times7\times4}{3\times5\times7}$$

$$=\frac{3\times7\times4x}{3\times5\times7}+\frac{3\times5\times7\times12}{3\times5\times7}-\frac{3\times5\times5x}{3\times5\times7};$$

e si potrà sopprimere il denominatore, perchè non si farà per questo che moltiplicar tutte le sue parti per esso denominatore (*Aritm.* 54), il che non può turbar l'eguaglianza: verrà per questa soppressione,

$$5\times7\times2x+3\times5\times7\times4$$

$$=3\times7\times4x+3\times5\times7\times12-3\times5\times5x,$$

ovvero

$$70x+420=84x+1260-75x;$$

equazione senza denominatori, dalla qual si ricaverà il valore di x per le regole precedenti.

L'ispezione del resultato qui sopra, come pure l'applicazione sola delle regole d'Aritmetica precitate fanno vedere evidentemente che nell'operazioae, di cui si tratta, i *numeratori di ciascuna frazione debbono esser moltiplicati per il prodotto dei denominatori di tutte l'altre, gl'interi per il prodotto di tutti i denominatori, e che non bisogna tenere alcun conto del denominatore comune delle frazioni resultanti.*

L'equazione $70x+420=84x+1260-75x$ diviene successivamente

$$70x+75x-84x=1260-420$$

$$61x=840$$

$$x=\frac{840}{61}=13\frac{47}{61}.$$

Il medesimo metodo s' applica all' equazioni letterali, osservando che non si possono allora che indicare le moltiplicazioni, che si affettuano quando si tratta di numeri.

Sia per esempio, l' Equazione

$$\frac{ax}{b}-c=\frac{dx}{e}+\frac{fg}{h};$$

ne dedurremo

$$eh\times ax-beh\times c=bh\times dx+be\times fg;$$

resultato, che può scriversi più semplicemente ponendo, conforme alla convenzione stabilita nel n. 7, di seguito gli uni agli altri, senza interposizione di segno, i fattori di ciascun prodotto, ed invertendo l' ordine delle moltiplicazioni per conservar l' ordine alfabetico, più facile nell' enunciazione delle lettere: così verrà

$$aehx-bceh=bdhx+befg;$$

dal che ne concluderemo

$$aehx-bdhx=befg+bceh,$$

$$x=\frac{befg+bceh}{aeh-bdh}.$$

14. Benchè non si possa dare alcuna regola generale, e precisa per formar l' equazione relativa ad un problema qualunque, esiste frattanto un precetto, la cui applicazione ben intesa non mancherà di condurre al fine proposto. Ecco questo precetto.

Indicare, col mezzo dei segni algebrici, sulle quantità cognite rappresentate tanto da numeri quanto da lettere, e sulle quantità incognite rappresentate sempre da lettere, i medesimi ragionamenti, e le medesime operazioni, che bisognerebbe eseguire per verificare i valori dell' incognite se essi fossero dati.

Per farne uso, bisogna primieramente determinare con diligenza quali sono le operazioni, che l' enunciato del Problema contiene, tanto esplicitamente, quanto implicitamente; ma in questo appunto precisamente consiste la difficoltà di *mettere in equazione* un problema proposto.

Ecco alcuni esempj affin di mostrare l' applicazione del precetto sopracitato. Ho scelti i due primi fra i problemi risoluti in Aritmetica, ad oggetto di porre sott' occhio la facilità, che apporta la scrittura algebrica riguardo allo sviluppamento degli enunciati.

1.° *Sieno due fontane, di cui la prima versando sola per 2 ore $\frac{1}{2}$ riempie una certa vasca, e la seconda riempie la vasca medesima versando sola per 3 ore $\frac{3}{4}$: quanto tempo sarà necessario perchè la stessa vasca sia ripiena dalle due fontane versando simultaneamente?*

Se questo tempo fosse dato, si verificherebbe il medesimo calcolando le quantità d' acqua versate da ciascuna fontana, e riunendo i resultati ci assicureremmo che esse compongano la totalità dell' acqua, che può contenere la vasca.

Ad oggetto di formare l' equazione, noteremo con x il tempo incognito, ed indicheremo sopra x le operazioni enunciate di sopra; ma affin di render la soluzione indipendente dai numeri dati, e parimente per abbreviare l' espressione di quelli dell' enunciato, che son frazionarî, si rappresenteranno ancora questi per via di lettere; laonde potremo scrivere a in vece 2 ore $\frac{1}{2}$, e b in vece di 3 ore $\frac{3}{4}$.

Ciò posto, prendendo, come in Aritmetica, la capacità della vasca per unità, si vedrà che

La prima fontana, che la riempie sola in un numero a di ore, vi versa in un'ora una quantità di acqua espressa dalla frazione $\frac{1}{a}$; e per conseguenza essa verserà in un numero x di ore la quantità $x \times \frac{1}{a}$, ovvero $\frac{x}{a}$ (*Aritm.* 53).

La seconda fontana, che riempie la medesima vasca in b ore, vi versa in un' ora una quantità di acqua espressa dalla frazione $\frac{1}{b}$; e per conseguenza in un numero x di ore essa verserà la quantità $x \times \frac{1}{b}$, ovvero $\frac{x}{b}$.

La quantità totale di acqua versata dalle due fontane insieme sarà dunque

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b},$$

e questa quantità dovendo eguagliar quella, che contiene la vasca, e che è stata presa per unità, avremo finalmente l' equazione,

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1.$$

Questa equazione, trattata con le regole precedenti, conduce a

$$bx+ax=ab,$$

$$x=\frac{ab}{b+a}.$$

L'ultima formula dà, per risolvere tutti i casi del problema proposto, questa regola semplicissima:

Dividete il prodotto dei numeri, che esprimono il tempo che impiega ciascuna fontana in particolare a riempire la vasca, per la somma di questi numeri; il quoziente esprimerà il tempo, che bisognerà alle due fontane per riempirla simultaneamente.

Applicando questa regola ai numeri dell' eunnciato, si ha

$$2\frac{1}{2}\times 3\frac{3}{4}=\frac{5}{2}\times\frac{15}{4}=\frac{75}{8},$$

$$2\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+\frac{15}{4}=\frac{20}{8}+\frac{30}{8}=\frac{50}{8};$$

di dove viene

$$x=\frac{75}{50}=\frac{3}{2}.$$

2.° *Sia a un numero da dividersi in tre parti, che abbiano tra loro i medesimi rapporti che i numeri dati* m, n, e p.

È visibile che la verificazione del problema si farebbe come segue:

Indicando con x la 1.ª parte, si avrà

$m : n :: x$; *alla* 2.ª *parte* $=\frac{nx}{m}$ (*Aritm.* 116);

$m : p :: x$: *alla* 3.ª *parte* $=\frac{px}{m}$;

e riunendo le tre parti, si troverebbe il numero da dividersi: avremo dunque l' equazione

$$x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a.$$

Riducendo tutti i suoi termini al denominatore m, essa diverrà

$$mx+nx+px=ma$$

e ricaveremo

$$x = \frac{ma}{m+n+p}.$$

Questo resultato non è che la traduzione algebrica della *Regola di Società* (*Aritm.* 124); poichè, riguardando i numeri m, n, p, come esprimenti i capitali dei mercanti, $m+n+p$ è il capitale totale, a il guadagno da dividersi, e l'espressione

$$x = \frac{ma}{m+n+p},$$

indica che *una parte si ottiene moltiplicando il capitale corrispondente per il guadagno totale, e dividendo il prodotto per la somma dei capitali*:
ciò conduce alla proporzione

il capitale totale : a un capitale parziale
: : il guadagno totale : al guadagno parziale.

15. La formazione dell' equazione del problema seguente esige alcune osservazioni speciali, che non si sono ancor presentate.

Un pescatore, affine d' incoraggiare suo figlio, gli promette 5 centesimi per ciascun tiro di rete, nel quale egli avrà preso del pesce: ma esso ancora promette di rendere a suo padre 3 centesimi per ciascun tiro infruttuoso. Dopo 12 tiri di rete il padre, ed il figlio fanno il lor conto. Il primo deve al secondo 28 centesimi: quanti tiri di rete avrà egli avuto felici?

Se si rappresenta il numero di questi tiri con x, il numero dei tiri infruttuosi sarà $12 - x$; e, se questi numeri fossero dati, si verificherebbero moltiplicando 5 centesimi per il primo, onde ottenere ciò che il padre deve dare al figlio, e tre centesimi pel secondo, onde avere ciò che il figlio deve rendere al padre: il primo numero dovrebbe sorpassare il secondo dei 28 centesimi, che il padre deve a suo figlio.

Si avrà per il primo numero x volte 5 centesimi, ovvero $5x$. A riguardo del secondo numero si presenta una difficoltà: come mai può ottenersi il prodotto di 3 per $12-x$? Se, in vece di x, si avesse un numero dato, effettuerebbesi prima la sottrazione indicata, poi si moltiplicherebbe 3 pel resto; ma per adesso tal cosa non è possibile, e bisogna procurare di effettuar la moltiplicazione avanti la sottrazione, o almeno di ridurre il resultato ad una collezione di termini algebrici simili a quelli, che contengono l'equazioni, che si sanno risolvere.

Con un poco di attenzione si fa palese che, prendendo 12

volte il numero 3, si ripete il 3 tante volte di più quante son le unità, che contiene il numero x, del quale si dovea prima diminuire il moltiplicatore 12; di maniera che il vero prodotto sarà

36 diminuito di 3 preso x volte, o di $3x$,

ovvero

$$36-3x.$$

Questa conclusione può verificarsi facilmente dando ad x dei valori numerici. Se, per esempio, x fosse eguale a 8, si avrebbe 3 da prendersi 12 volte—8 volte; e, se si trascurasse—8 volte, si metterebbe nel resultato 8 volte di più il numero 3: il vero prodotto sarà dunque

$$3\times 12-3\times 8=36-24=12.$$

Tal resultato si accorda con quello, che si ottiene togliendo primieramente 8 da 12; perchè allora

$$12-8=4, \quad e \quad 3\times 4=12.$$

Ciò posto, poichè il danaro, che il padre deve a suo figlio, è espresso con $5x$, e quello, che il figlio deve a suo padre, vien espresso da $36-3x$, bisogna che il secondo numero tolto dal primo dia per resto 28, ma qui ancora nasce una nuova difficoltà: come toglere $36-3x$ da $5x$, senza aver prima sottratto $3x$ da 36?

Si toglie questa difficoltà osservando che, se si trascurasse il termine—$3x$, e si togliesse da $5x$ il numero 36 tutto intero, si sarebbe tolto necessariamente $3x$ di più; poichè non è che dopo di avere diminuito 36 di $3x$, che bisogna toglierlo da $5x$.

Così la differenza $5x-36$ dev'essere aumentata di $3x$ per formare la quantità, che deve restare dopo che abbiamo tolto da $5x$ il numero espresso da $36-3x$: questa quantità sarà dunque

$$5x-36+3x;$$

e si avrà l'equazione

$$5x-36+3x=28,$$

che successivamente riducesi a

$$8x-36=28,$$
$$8x=28+36,$$
$$8x=64,$$
$$x=\frac{64}{8}=8.$$

Son dunque 8 i tiri di rete felici, e 4 per conseguenza gl'infruttuosi.

Infatti 8 tiri a 5 centesimi l'uno danno 40 centesimi
4 tiri a 3 danno 12

differenza. 28,

come lo vuole l'enunciato del problema

Se si volesse rendere generale la soluzione, si rappresenterebbe con a la somma, che il padre dà a suo figlio per ciascun tiro di rete felice, con b ciò che il figlio rende a suo padre per ciascun tiro di rete infruttuoso, con c il numero totale dei tiri di rete, e con d ciò che il padre deve a suo figlio dopo questo numero di tiri. E notando sempre con x il numero de' tiri felici, $c-x$ sarebbe quello de' tiri infruttuosi; ciascun tiro della prima specie producendo al figlio una somma a, x tiri produrrebbero $a \times x$ ovvero ax, ed i tiri infruttuosi produrrebbero al padre la somma b moltiplicata pel numero $c-x$.

Il ragionamento, col quale abbiamo trovato tutte le parti, di cui si compone il prodotto di 3 per $12-x$, si applica egualmente al caso generale. Se si trascura primieramente $-x$ per formare il prodotto bc di b per c tutto intero, la quantità b sarà ripetuta x volte di più, e per conseguenza il vero prodotto sarà $bc-bx$.

Per togliere questo prodotto dalla quantità ax, bisogna osservare ancora, come nell' esempio numerico, che se si togliesse la quantità bc intera, si toglierebbe di più la quantità bx, di cui la prima dev' essere avanti diminuita; e per conseguenza il vero resto non è solamente $ax-bc$, ma ...... $ax-bc+bx$.

Questo resto dovendo essere eguale a d, l' equazione del problema sarà

$$ax-bc+bx=d,$$

e darà

$$ax+bx=d+bc,$$

$$x=\frac{d+bc}{a+b}.$$

Questa formula generale indicando quali operazioni bisogna fare sopra i numeri a, b, c, d, per ottenere l' incognita x, possiamo tradurla in Regola, ovvero scrivere in luogo delle lettere a, b, c, d i numeri dati: l' ultima operazione è ciò che si dice *sostituire* i valori dei dati, o sivvero *metter la formula in numeri*. Applicando quelli dell' esempio citato, viene

$$x=\frac{28+3\times 12}{5+3},$$

ed effettuando poscia le operazioni indicate, si ha, come sopra,

$$x=\frac{28+36}{8}=\frac{64}{8}=8.$$

Metodi per effettuare, quand' è possibile, le operazioni indicate sulle quantità rappresentate da lettere.

16. Il problema precedente ha fatto vedere che bisogna, per certi casi, decomporre in moltiplicazioni parziali una moltiplicazione indicata sulla somma, o differenza di più quantità; e nel n.° 11 abbiamo fatto precisamente il contrario, decomponendo la quantità $ax-bx+cx$, che rappresenta il resultato di più moltiplicazioni seguite da addizioni, e da sottrazioni, nei due fattori $a-b+c$, ed x, che non indicano che una sola moltiplicazione preceduta da addizione, e sottrazione. I ragionamenti, dei quali ci siamo serviti in queste due circostanze, possono esser ridotti a regole; e ne resulteranno sulle quantità rappresentate da lettere delle operazioni, che si sono chiamate *moltiplicazioni* e *divisioni algebriche*, per l'analogia che esse hanno con le operazioni dell'Aritmetica, che portano i medesimi nomi.

Abbiam concepite, in virtù della medesima analogia, due operazioni, che portano i nomi di *addizione* e *sottrazione*, e nelle quali mirasi al fine di riunire in una sola più espressioni algebriche, o di toglierne una dall'altra; ma queste operazioni, come le precedenti, differiscono da quelle dell'Aritmetica in ciò che i loro resultati non essendo il più spesso che delle indicazioni d'operazioni da effettuarsi, non presentano se non che una trasformazione delle operazioni primitivamente indicate in altre, che producono il medesimo effetto. Succede soltanto che si simplificano l'espressioni, o che si dà loro una forma propria a manifestare le condizioni, che deggion essere soddisfatte.

Per ispiegar queste operazioni, si chiamano quantità *monomie* o semplicemente *monomie* quelle, le quali non hanno che un solo termine, come $+2a$, $-3ab$, ec.; *binomie* quelle, che ne hanno due, come $a+b$, $a-b$, $5a-2x$, ec.; *trinomie* quelle, che ne hanno tre; *quadrinomie* quelle, che ne hanno quattro; ed in generale *polinomie* le quantità composte di più termini. È bene osservare che le monomie o i monomî si chiamano ancora quantità *incomplesse*, ed i polinomî quantità *complesse*.

Della addizione delle quantità algebriche.

17. L'addizione delle quantità monomie si fa unendole col segno $+$; così b addizionato con a s'indica con $a+b$. Ma quando ci proponiamo di unire insieme dell'espressioni algebri-

che, abbiamo nel medesimo tempo per fine di simplificare il resultato riducendolo al più piccol nnmero di termini possibile, mediante la riúnione di più di questi termini in uno solo.

Questa riunione è quella, ch' è stata eseguita nei numeri 2, e 5 riducendo la quantità $x+x$ a $2x$ la quantità $x+x+x$ a $3x$. Essa non può aver luogo che a riguardo delle quantità espresse dalle medesime lettere, e che si chiamano per questa ragione quantità *simili*. Si riguarda la quantità letterale come una unità, che si trova ripetuta un certo numero di volte; così le quantità $2a$, e $3a$, considerate come due, o tre nnità d'una specie particolare, formano con la loro somma $5a$, ovvero 5 nnità della medesima specie. Parimente $4ab$, e $5ab$ formano $9ab$.

In questo caso l'addizione si effettua sopra le cifre, che precedono la quantità letterale, e che indicano quante volte essa è ripetuta. Queste cifre si chiamano *coefficienti*. Il coefficiente è dunque il moltiplicatore della quantità, davanti alla quale è posto; e bisogna rammentarsi che, quando esso non è scritto, egli è nguale all' unità; perchè $1a$ è la stessa cosa che a.

18. Allorchè si tratta di addizionare delle quantità qualnnque, come

$$4a+5b\,, \quad e \quad 2c+3d\,,$$

il totale debb' essere evidentemente composto di tutte le parti unite insieme; bisogna dunque scrivere

$$4a+5b+2c+3d.$$

Se al contrario si avessero

$$4a+5b\,, \quad e \quad 2c-3d.$$

bisognerebbe, nella lor somma, scrivere col segno —, o indicar come sottrattiva la quantità $3d$, che dovendo esser tolta da $2c$, diminuirebbe necessariamente d'altrettanto la somma, che formerebbesi riunendo $2c$ con la prima delle quantità proposte, e si avrebbe

$$4a+5b+2c-3d.$$

Qnesti due esempî fan manifesto, che *l' addizione algebrica dei polinomî si effettua scrivendo in seguito le une delle altre, con i loro segni, le quantità che bisogna addizionare, ed osservando che i termini, i quali non son preceduti da alcun segno, s' intende che abbiano il segno* $+$.

L' operazione spiegata qui sopra non è, a parlar propriamente, che un' indicazione, mediante la quale la riunione di due quantità complesse è ridotta all'addizione, ed alla sottrazione di un certo numero di quantità monomie; ma, se l'espressioni da riunirsi conterranno de' termini simili, si potranno

addizionare questi termini operando immediatamente su i loro coefficienti.

Sieno, per esempio, l'espressioni

$$4a+9b-2c,$$
$$2a-3c+4d,$$
$$7b+c-e;$$

la somma indicata sarà, dietro della regola antecedente,

$$4a+9b-2c+2a-3c+4d+7b+e-e.$$

Ma i termini $4a$, e $+2a$ essendo formati di quantità simili, si riuniscono in uno solo eguale a $6a$.

Parimente i termini $+9b$, $+7b$ danno $16b$.

I termini $-2c$, e $-3c$, ambedue sottrattivi, producono nel totale il medesimo effetto che la sottrazione di una quantità eguale alla loro somma, e vale a dire, la sottrazione di $5c$; e siccome, in virtù del termine $+c$, dovremo al contrario aggiunger c, resterà solamente da sottrarre $4c$.

La somma delle espressioni proposte sarà dunque ridotta a

$$6a+16b-4c+4d-e.$$

19. L'ultima operazione praticata qui sopra, e per la quale si riuniscono tutti i termini simili in uno solo, qualunque segno essi abbiano, chiamasi *riduzione*. *Essa s'effettua facendo la somma delle quantità simili affette dal segno* $+$, *quella delle quantità simili affette dal segno* $-$; *poi togliendo la più piccola di queste due somme dalla più grande, e dando al resto il segno della più grande.*

È da osservarsi che la riduzione si applica a tutte le operazioni algebriche.

Ecco, per esercitare il Lettore, alcuni esempî di addizioni coi loro resultati.

1.° Addizionare le quantità

$$7m+3n-14p+17r$$
$$3a+9n-11m+2r$$
$$5p-4m+8n$$
$$11n-2b-m-r+s$$

resultato $7m+3n-14p+17r+3a+9n-11m+2r$
$+5p-4m+8n+11n-2b-m-r+s.$

Facendo la riduzione, questa quantità si cangia nella seguente.

$$-9m+31n-9p+18r+3a-2b+s,$$

ovvero $31n-9m-9p+18r+3a-2b+s$

cominciando da un termine, che abbia il segno $+$.

2.° Addizionare le quantità

$$11bc+4ad-8ac+5cd$$
$$8ac+7bc-2ad+4mn$$
$$2cd-3ab+5ac+an$$
$$9an-2bc-2ad+5cd$$

Resultato $11bc+4ad-8ac+5cd+8ac+7bc-2ad$
$+4mn+2cd-3ab+5ac+an+9an-2bc$
$-2ad+5cd$.

E riducendo questa quantità, essa diviene
$16bc+5ac+12cd+4mn-3ab+10an$.

Della sottrazione delle quantità algebriche.

20. La sottrazione de' monomî s' indica, come abbiam convenuto, ponendo il segno — tra la quantità da sottrarsi, e quella, da cui si sottrae:

b sottratto da a s' indica con $a-b$.

Allorchè le quantità sono simili, la sottrazione si esegue immediatamente sopra i lor coefficienti.

Se da $5a$ si toglie $3a$, si ha per resto $2a$.

A riguardo della sottrazione de' polinomî bisogna distinguere due casi. 1.° Se la quantità da sottrarsi ha tutti i suoi termini affetti dal segno $+$, bisogna evidentemente dar loro il segno —, poichè dobbiam togliere successivamente tutte le parti della quantità da sottrarsi.

Se per esempio, da $5a-9b+2c$, si vuol togliere $2d+3e+4f$, bisogna scrivere
$5a-9b+2c-2d-3e-4f$.

2.° Se la quantità da sottrarsi ha dei termini affetti dal segno —, bisogna dare a questi termini il segno $+$. Infatti, se dalla quantità a si volesse togliere $b-c$, e si scrivesse primieramente $a-b$, avremmo così diminuito a dell' intera quantità b; ma la sottrazione non dovea effettuarsi che dopo aver diminuito b della quantità c; abbiamo dunque tolto di più quest' ultima quantità, che bisogna per conseguenza restituire col segno $+$, il che darà pel vero resultato
$a-b+c$.

Questo ragionamento, che si può applicare a tutti i casi consimili, fa vedere che il segno — di c ha dovuto esser cangiato in $+$; e considerando ad un tempo questo resultato ed il precedente, concluderemo che *la sottrazione delle quantità algebriche si effettua scrivendo in seguito della quantità, da cui se ne vuol sottrarre un' altra, quest' altra, dopo di aver cangiati i segni $+$ in —, ed i segni — in $+$.*

Allorchè abbiamo scritto il resultato, che somministra la regola enunciata qui sopra, si fanno, se vi abbian luogo, delle riduzioni conformi al precetto del n.° 19, come lo vedremo negli esempî seguenti.

1.° Sottrarre da $17a+2m-9b-4c+23d$
la quantità . . . $51a-27b+11c-4d$.

Resultato. . . $17a+2m-9b-4c+23d$
$-51a+27b-11c+4d.$

E facendo la riduzione, questa quantità diviene
$$-34a+2m+18b-15c+27d$$
ovvero
$$2m-34a+18b-15c+27d.$$

2.° Sottrarre da $5ac-8ab+9bc-4am$
la quantità . . . $8am-2ab+11ac-7cd.$

Resultato . . . $5ac-8ab+9bc-4am$
$-8am+2ab-11ac+7cd$

Effettuando la riduzione, si ottiene
$$-6ac-6ab+9bc-12am+7cd,$$
ovvero
$$9bc-6ac-6ab-12am+7cd.$$

Della moltiplicazione delle quantità algebriche.

21. Fino a tanto che non si considerano nelle lettere che i valori numerici delle quantità, che esse rappresentano, dobbiamo formarci della moltiplicazione algebrica la medesima idea che della moltiplicazione aritmetica (*Aritm.* 21 74). Così *moltiplicare* a *per* b, *vuol dire comporre con la quantità rappresentata da* a, *un' altra quantità, nella stessa maniera che la quantità rappresentata da* b *lo è con l' unità.*

Abbiamo di già fatto conoscere nei numeri 2, e 7 i segni, dei quali abbiam convenuto far uso per indicar la moltiplicazione; ed il prodotto di a per b si scriverà in conseguenza tanto con $a\times b$, quanto con $a\,.\,b$, ovvero finalmente con ab.

Abbiamo assai sovente bisogno d' indicare più moltiplicazioni successive, come quella di a per b, dipoi del prodotto ab per c, quindi di quest' ultimo prodotto per d, e così discorrendo. In tal caso si rende evidente, che l' ultimo resultato è un numero, il quale ha per *fattori* i numeri a, b, c, d (*Aritm.* 22); e generalizzando l' ultima delle convenzioni richiamate qui sopra, *s' indica questo prodotto scrivendo in seguito l' un dell' altro, e senza alcuna frapposizione di segno, i fattori, dai quali esso è formato* : abbiamo in questa maniera l' espressione $abcd$.

Reciprocamente, qualunque espressione, che sia tale come $abcd$, formata da più lettere scritte immediatamente in seguito l' une all' altre, esprime sempre il prodotto dei numeri rappresentati da queste lettere.

Ho di già fatto tacitamente uso di queste convenzioni, nel-

le quali i coefficienti numerici son pure compresi, poichè essi sono manifestamente fattori della quantità proposta. Difatti, $15abcd$, esprimendo la quantità $abcd$ presa 15 volte, esprime ancora il prodotto dei cinque fattori 15, a, b, c, d.

22. Segue da ciò, che per indicare la moltiplicazione di più monomî, tali come $4abc$, $5def$, $3mn$, bisogna scrivere queste quantità in seguito l'une dell'altre, senza interposizione di segno, e verrà

$$4abc5def3mn\,;$$

ma siccome abbiam fatto vedere in Aritmetica, n.° 70, che si poteva invertire come volevasi l'ordine dei fattori d'un prodotto senza che il valore di questo prodotto cangiasse, si profitta di tal circostanza per avvicinare i fattori numerici, la moltiplicazione dei quali può effettuarsi con le regole dell'Aritmetica: si concepisce dunque il prodotto come indicato nell'ordine 4. 5. 3. $abcdefmn$; ed effettuando la moltiplicazione de' numeri 4, 5, 3, avremo solamente

$$60abcdefmn\ (*).$$

23. L'espressione di un prodotto si abbrevia molto allorchè esso contiene dei fattori eguali. In vece di scriver più volte di seguito la lettera, che rappresenta uno di questi fattori, non si scrive che una sola volta, e *s'indica con un numero quante volte essa avrebbe dovuto scriversi come fattore*; ma perchè questo numero indica delle moltiplicazioni successive, egli dev'essere segnalatamente distinto dal coefficiente, il quale non indica che delle addizioni: ecco perchè si pone un tal numero alla destra della lettera, ed un poco al di sopra, laddove che il coefficiente è sempre scritto a sinistra della lettera, e sulla medesima linea.

Dopo di queste convenzioni il prodotto di a per a, che sarebbe indicato, secondo il numero 21, con aa, diviene a^2. Il 2 superiore fa vedere che il numero rappresentato dalla lettera a è due volte fattore nell'espressione proposta, che non

(*) *L'uso dei simboli algebrici abbreviando molto la dimostrazione della presente proposizione, ho creduto doverla qui richiamare per mezzo di questi simboli.*

Se si scrive il prodotto a b c d e f *come segue, cioè* abc $\times$ def $\times$ f, *e si cambii l'ordine dei due fattori del prodotto* de *per avere* ed (Aritm. 27), *verrà* abc $\times$ ed $\times$ f, *ovvero* . . . abcedf. *È evidente che potremo con delle nuove decomposizioni far qualunque cangiamento, che si vorrà nell'ordine de' fattori del prodotto notato.*

bisogna in conseguenza confonderlo con $2a$, che non è altro se non se l'abbreviazione di $a+a$. Per ben concepire l'errore, che si commetterebbe prendendo una espressione per l'altra, serve sostituire dei numeri alle lettere. Se si avesse; per esempio $a=5$, $2a$ diverrebbe $2 \,.\, 5=10$, e $a^2=a \times a=5.5=25$.

Continuando l'istesso metodo, si vedrà che per esprimere un prodotto, nel quale a fosse tre volte fattore, bisognerebbe scrivere a^3 in vece di aaa, parimente a^5 rappresenta un prodotto, nel quale a è cinque volte fattore, ovvero equivalente ad $aaaaa$.

24. I prodotti formati così da moltiplicazioni successive di una stessa quantità son chiamati in generale *potenze* di questa quantità.

La quantità stessa, cioè a, si chiama la prima potenza.

La quantità moltiplicata per se medesima, ovvero aa, o a^2, la seconda potenza, che chiamasi ancora il *quadrato*.

La quantità moltiplicata due volte di seguito per se stessa, o aaa, ossia a^3, è la terza potenza, che si chiama ancora *cubo* (*).

In generale una potenza qualunque si esprime col numero dei fattori eguali, dai quali essa è formata; a^5, oppure $aaaaa$, è la *quinta* potenza di a.

Per mostrare l'applicazione di queste denominazioni, prenderò il numero 3, ed avrò

1.ª potenza 3
2.ª . . . . . . 3. 3= 9
3.ª . . . . . . 3. 3. 3=9. 3= 27
4.ª . . . . 3. 3. 3. 3=27.3= 81
5.ª . . . 3. 3. 3. 3. 3=81.3=243.

Il numero, che esprime la potenza di un altro, si chiama *esponente* di questo.

L'esponente, allorchè è eguale all'unità, non si scrive: a è la stessa cosa che a^1.

Si fa chiaro da ciò, che precede, che *per formare una potenza d'un numero, bisogna moltiplicar questo numero per se stesso una volta di meno che non vi sono unità nell'esponente della potenza*.

25. Poichè l'esponente indica il numero dei fattori eguali,

(*) *Le denominazioni di* quadrato, *e di* cubo *dipendendo da considerazioni geometriche, e rompendo l'uniformità della nomenclatura dei prodotti formati da fattori eguali, sono impropriissime in Algebra; ma s'impiegano frequentemente a causa della lor brevità.*

che formano l'espressione, di cui egli fa parte, e perchè il prodotto di due quantità deve aver per fattori tutti quelli, che forman ciascuna di queste quantità, ne segue che l'espressione a^5, nella quale a è 5 volte fattore, moltiplicata per l'espressione a^3, nella quale a è 3 volte fattore, deve dare un prodotto, nel quale a sia 8 volte fattore, ed in conseguenza espresso con a^8; e che in generale *il prodotto di due potenze del medesimo numero deve aver per esponente la somma di quelli del moltiplicando, e del moltiplicatore.*

26. Segue da ciò che, *quando due monomi hanno delle lettere comuni, si può abbreviar l'espressione del prodotto di queste quantità addizionando subito gli esponenti delle lettere simili del moltiplicando e del moltiplicatore.*

Per esempio, l'espressione del prodotto delle quantità a^2b^3c, ed $a^4b^5c^2d$, che sarebbe $a^2b^3ca^4b^5c^2d$ seguendo le convenzioni del n° 21, si abbrevia riunendo i fattori indicati colla medesima lettera, il che dà

$$a^2a^4b^3b^5c\,c^2d,$$

donde concludesi

$$a^6b^8c^3d,$$

scrivendo

a^6 in vece di $a^2\,a^4$, ovvero di $c^1\,c^2$.
b^8 in vece di $b^3\,b^5$
c^3 in vece di $c\ \ c^2$.

27. Nella stessa maniera che si distinguono le potenze dal numero de' fattori eguali, da cui esse sono formate, si classificano pure i prodotti qualunque pel numero dei fattori semplici, o *primi*, che gli formano; ed io darò a queste classi il nome di *gradi*. Il prodotto a^2b^3c sarà, per esempio del 6° grado, perchè contiene 6 fattori semplici, cioè, 2 fattori a, 3 fattori b, e 1 fattore c. È evidente che i fattori a, b, e c riguardati qui come primi, non lo sono che riguardo all'Algebra, la qual non permette di decomporli; ma essi possono rappresentare d'altronde de' numeri composti: non si tratta adesso che dello stato lor generale (*).

(*) *Per una conseguenza dell' analogia indicata nella Nota della pagina* 29. *si chiama comunemente* dimensione *ciò ch'io chiamo* grado. *L' espressione riportata qui sopra avrebbe, nel linguaggio ordinario,* 6 *dimensioni. Quest' esempio dimostra bene l'assurdità dell' antica nomenclatura, stabilita sopra ciò che i prodotti di* 2. *o di* 3 *fattori misurano l' estensione delle superficie, e i volumi dei corpi; quantità, che hanno due, o tre dimensioni: ma passato questo termine, la corrispondenza tra l' espressioni algebriche, e le figure geometriche cessa, poichè l' estensione non può aver mai più di tre dimensioni.*

I coefficienti espressi in numeri non si considerano nel determinare il grado delle quantità algebriche; non si ha riguardo che alle lettere.

È manifesto (21. 25.) che quando si moltiplican due monomî l'uno per l'altro, il numero, ch'esprime il grado del prodotto, è la somma di quelli, che esprimono il grado di ciascuno di questi monomî.

28. La moltiplicazione delle quantità complesse si riduce a quella delle quantità monomie, considerando separatamente ciascun termine del moltiplicando, e del moltiplicatore nello stesso modo che nell'Aritmetica si opera in particolare sopra ciascuna cifra dei numeri, che ci propouiamo di moltiplicare (*Aritm.* 33.); la riunione de' prodotti parziali compone il prodotto totale: ma l'Algebra presenta una circostanza di più che non s'incontra nei numeri. Questi non hanno termini da togliere, ovvero parti sottrattive; le unità, decine, centinaia, ec., che gli compongono, si considerano sempre come sommate tra loro, ed allora è evidente che il prodotto totale deve formarsi della somma dei prodotti di ciascuna parte del moltiplicando, per ciascuna parte del moltiplicatore.

Lo stesso succede quando si tratta d'espressioni letterali, di cui tutti i termini son riuniti col segno $+$.

Il prodotto di $a+b$
moltiplicato per c

è $ac+bc$,

e si ottiene moltiplicando ciascuna parte del moltiplicando pel moltiplicatore, ed aggiungendo i due prodotti parziali ac, e bc. Se il moltiplicando contenesse più di due parti, l'operazione sarebbe sempre la stessa.

Allorchè il moltiplicatore è la somma di più termini, è visibile che il prodotto si compone dalla somma de' prodotti del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore.

Il prodotto di $a+b$
moltiplicato per $c+d$

è $\left\{ \begin{array}{l} ac+bc \\ +ad+bd; \end{array} \right.$

perchè moltiplicando primieramente $a+b$ per c, s'ottiene $ac+bc$; poi moltiplicando $a+b$ per il secondo termine d del moltiplicatore, si trova $ad+bd$; e la somma di questi due resultati dà $ac+bc+ad+bd$ per lo prodotto totale.

29. Allorchè il moltiplicando contiene delle parti sottrattive, i prodotti di queste parti pel moltiplicatore deggion esser tolti dagli altri; e vale a dire, debbon esser preceduti dal segno $-$. Per esempio,

Il prodotto di $a-b$
moltiplicato per c
è

$$ac-bc\ ;$$

perchè ogni volta che prenderemo tutta intera la quantità a, che avrebbe dovuto essere diminuita di b avanti la moltiplicazione, prenderemo di più la quantità b, il prodotto ac, nel quale a intera è presa tante volte quante l' indica il numero c, sorpasserà per conseguenza il prodotto cercato della quantità b presa tante volte quante l' indica il numerc c, ovvero del prodotto bc: bisognerà dunque togliere bc da ac, il che darà, come qui sopra,

$$ac-bc.$$

Lo stesso ragionamento s' applicherebbe a ciascuna delle parti sottrattive del moltiplicando, qualunque ne fosse il numero, e qualunque fosse quello dei termini del moltiplicatore, purchè essi fossero tutti affetti dal segno $+$. Osservando che i termini, i quali mancano di segno s' intende che abbiano il segno $+$, si vede da questi esempî che i termini del moltiplicando affetti dal segno $+$ danno un prodotto parziale, che è affetto dal segno $+$, mentre che quelli, i quali sono affetti dal segno $-$, ne danno uno affetto dal segno $-$. Segue da ciò che, *quando il moltiplicatore parziale ha il segno* $+$, *il prodotto parziale ha il medesimo segno del moltiplicando parziale.*

30. Il contrario ha luogo quando il moltiplicatore contiene delle parti sottrattive; i prodotti formati da queste parti debbono esser prese con un segno contrario a quello, che essi avrebbero stando alla regola precedente. Resteremo di ciò convinti dall' esempio che segue:

Sia il moltiplicando $a-b$
il moltiplicatore $c-d$

il prodotto sarà $\begin{cases} ac-bc \\ -ad+bd\ ; \end{cases}$

perchè il prodotto del moltiplicando pel primo termine c del moltiplicatore sarà, in virtù dell' esempio precedente $ac-bc$; ma, prendendo c tutto intero per moltiplicatore in vece di c diminuito di d, si prende la quantità $a-b$ tante volte di più quante l' indica il numero d; così il prodotto $ac-bc$ sorpassa quello che si cerca, del prodotto di $a-b$ per d. Ora, quest' ultimo è, per ciò che precede, $ad-bd$; ed affine di toglierlo dal primo bisogna cangiarne i segni (20.): avremo dunque $ac-bc-ad+bd$.

31. Riepilogando le conseguenze degli esempî qui sopra, concluderemo *che la moltiplicazione de' polinomî s'effettua moltiplicando successivamente secondo le regole date pei monomî* (numeri 21. e 26.), *tutti i termini del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, ed avvertendo che, se il moltiplicatore parziale ha il segno +, il prodotto parziale deve avere il medesimo segno del moltiplicando parziale, ed il segno contrario se il moltiplicatore parziale ha il segno —.*

Se si sviluppano i differenti casi di quest'ultima regola, troveremo.

1.° Che un termine, il quale ha il segno +, moltiplicato per un termine, che ha il segno +, dà un prodotto, che ha il segno +.

2.° Che un termine, il quale ha il segno —, moltiplicato per un termine, che ha il segno +, dà un prodotto, che ha il segno —.

3.° Che un termine, il quale ha il segno +, moltiplicato per un termine, che ha il segno —, dà un prodotto, che ha il segno —.

4.° Che un termine, il quale ha il segno —, moltiplicato per un termine, che ha il segno—, dà un prodotto, che ha il segno+.

Questi resultati fanno vedere che, *quando il moltiplicando, ed il moltiplicatore parziali hanno il medesimo segno, il prodotto ha il +, e che, se essi hanno dei segni differenti, il prodotto ha il segno —.*

32. Affine di facilitare la pratica della moltiplicazione dei polinomî, ecco la recapitolasion delle regole, che bisogna seguire in questa operazione.

1.° *Determinare il segno di ciascun prodotto parziale secondo la regola precitata*: questa è la regola dei segni.

2.° *Formare il coefficiente facendo il prodotto di quelli del moltiplicando e del moltiplicatore parziali* (22.): questa è la regola de' coefficienti.

3.° *Scrivere in seguito le une dell' altre tutte le lettere differenti contenute nel moltiplicando e nel moltiplicatore parziali* (21.); questa è la regola delle lettere.

4.° *Dare alle lettere comuni al moltiplicando ed al moltiplicatore parziali un esponente eguale alla somma di quelli, che essi hanno in questo moltiplicando, ed in questo moltiplicatore* (25): questa è la regola degli esponenti.

L'esempio, che segue, offre l'applicazione di tutte le regole divisate.

Moltiplicando	$5a^4-2a^3b+4a^2b^2$
Moltiplicatore	$a^3-4a^2b+2b^3$
	$5a^7-2a^6b+4a^5b^2$
Prodotti parziali	$-20a^6b+8a^5b^2-16a^4b^3.$
	$+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$
Resultato ridotto	$5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3$ $-4a^3b^4+8a^2b^5.$

La prima linea dei prodotti parziali contiene quelli di tutti i termini del moltiplicando pel primo termine a^3 del moltiplicatore: siccome s' intende che questo termine abbia il segno $+$, i prodotti, ch' ei somministra: hanno i medesimi segni dei termini corrispondenti del moltiplicando (31).

Il primo termine $5a^4$ del moltiplicando avendo il segno $+$, non si scrive quello del primo prodotto parziale, che pure sarebbe $+$, il coefficiente 5 di a^4 essendo moltiplicato pel coefficiente 1 di a^3, dà 5 per quello del prodotto parziale; la somma dei due esponenti della lettera a è $4+3$, ovvero 7: il primo prodotto parziale è dunque $5a^7$.

Il secondo termine $-2a^3b$ del moltiplicando avendo il segno $-$, il prodotto ha il segno $-$; il coefficiente 2 di a^3b moltiplicato pel coefficiente 1 di a^3 dà 2 per coefficiente del prodotto; l' esponente della lettera a, comune ai termini, che si moltiplicano, è $3+3$, ovvero 6, e si scrive in seguito la lettera b, la qual non si trova che nel moltiplicando parziale: il secondo prodotto parziale è dunque $-2a^6b$.

Il terzo termine $+4a^2b^2$ dà un prodotto parziale affetto dal segno $+$, e, per le regole applicate ai due termini precedenti, si trova $+4a^5b^2$.

La seconda linea contiene i prodotti di tutti i termini del moltiplicando pel secondo termine $-4a^2b$ del moltiplicatore; quest' ultimo avendo il segno $-$, tutti i prodotti, che esso dà, debbono avere de' segni contrarî a quelli de' termini corrispondenti del moltiplicando: i coefficienti, le lettere, e gli esponenti si formano come nella linea precedente.

La terza linea finalmente contiene i prodotti di tutti i termini del moltiplicando per il terzo termine $+2b^3$ del moltiplicatore, questo termine avendo il segno $+$, tutti i prodotti, che esso dà, hanno il medesimo segno dei termini corrispondenti del moltiplicando.

Dopo di aver formati tutti i prodotti parziali, di cui si compone il prodotto totale, si esamina attentamente quest'ul-

timo, per veder se contenga de' termini simili. Allorchè esso ne contiene, si riducono, secondo la regola del num.° 19, osservando che due termini, per esser simili, devono contenere non solo le medesime lettere, ma ancora affette dagli esponenti medesimi. Nell' esempio di sopra vi sono tre riduzioni cioè,

$-\ 2a^6b$, e $-20a^6b$, il che dà $-22a^6b$,
$+\ 4a^5b^2$, e $+8a^5b^2$; il che dà $+12a^5b^2$,
$-\ 16a^4b^3$, e $+10a^4b^3$, il che dà $-6a^4b^3$.

Queste riduzioni essendo eseguite, abbiamo per resultato la linea ultima dell' esempio.

Ecco in oltre, per esercitare il Lettore, un esempio di moltiplicazione, che è facile ad effettuarsi dopo ciò, che precede.

Moltiplicando $5a^4b^2+7a^3b^3-15a^5c+23b^2d^4-17bc^3d^2-9abcdm^2$

Moltiplicatore $11b^3-8c^3+5abc-2bdm$

Prodotti parziali
$$\begin{cases} 55a^4b^5+77a^3b^6-165a^5b^3c+253b^5d^4-187b^4c^3d^2-99ab^4cdm^2 \\ -40a^4b^2c^3-56a^3b^3c^3+120a^5c^4-184b^2c^3d^4+136bc^6d^2+72abc^4dm^2 \\ +25a^5b^3c+35a^4b^4c-75a^6bc^2+115ab^3cd^4-85ab^2c^4d^2-45a^2b^2c^2dm^2 \\ -10a^4b^3dm-14a^3b^4dm+30a^5bcdm-46b^3d^5m+34b^2c^3d^3m+18ab^2cd^2m^3 \end{cases}$$

Resultato simplificato
$$\begin{cases} 55a^4b^5+77a^3b^6-140a^5b^3c+253b^5d^4-187b^4c^3d^2-99ab^4cdm^2-40a^4b^2c^3-56a^3b^3c^3 \\ +120a^5c^4-184b^2c^3d^4+136bc^6d^2+72abc^4dm^2+35a^4b^4c-75a^6bc^2+115ab^3cd^4-85ab^2c^4d^2 \\ -45a^2b^2c^2dm^2-10a^4b^3dm-14a^3b^4dm+30a^5bcdm-46b^3d^5m+34b^2c^3d^3m+18ab^2cd^2m^3. \end{cases}$$

33. I metodi della moltiplicazione fanno vedere che, se tutti i termini del moltiplicando son del medesimo grado (27), e che quelli del moltiplicatore sien pure del grado stesso, tutti i termini del prodotto saranno d' un grado espresso dalla somma dei numeri, che denotano il grado dei termini di ciascun dei fattori.

Nel primo esempio il moltiplicando è del quarto grado, il moltiplicatore del terzo; il prodotto è del settimo.

Nel secondo esempio il moltiplicando è del sesto grado, il moltiplicatore del terzo; il prodotto è del nono.

L' espressioni consimili a quelle, che abbiamo citate, i cui termini sono del medesimo grado, si chiamano espressioni *omogenee*. L' osservazione, che abbiamo fatta sopra i loro prodotti, è utile a prevenire gli errori, che si potrebber commetter dimenticandosi di qualcuno de' fattori nelle moltiplicazioni parziali.

Le operazioni algebriche effettuate sopra quantità letterali lasciando vedere come le diverse parti di queste quantità concorrono alla formazione dai resultati, fanno spesso conoscere delle proprietà generali dei numeri indipendentemente da qualunque sistema di numerazione. Le moltiplicazioni seguenti conducono a conseguenze di questo genere notabilissime, e d'una applicazione frequente in appresso.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

La prima, dalla quale resulta che la quantità $a+b$ moltiplicata per $a-b$ dà a^2-b^2, fa vedere che, *se si moltiplica la somma di due numeri per la lor differenza, il prodotto sarà la differenza de' quadrati di questi numeri.*

Se si prende, per esempio, la somma 11 dei numeri 7, e 4, e si moltiplichi per la differenza 3 di questi numeri, il prodotto 3×11, ovvero 33, sarà eguale alla differenza tra 49 quadrato di 7, e 16 quadrato di 4.

Dal secondo esempio, nel quale $a+b$ è due volte fattore, si apprende che *la seconda potenza*, *ovvero il quadrato di una quantità composta di due parti*, a, e b, *contiene il quadrato della prima parte*, *più il doppio del prodotto della prima parte per la seconda*, *più il quadrato della seconda*.

Il terzo esempio, ove abbiamo moltiplicato la seconda potenza di $a+b$ per la prima, dimostra che *la terza potenza*, *o il cubo di una quantità composta di due parti*, *contiene il cubo della prima*, *più tre volte il quadrato della prima moltiplicato per la seconda*, *più tre volte la prima moltiplicata pel quadrato della seconda*, *più finalmente il cubo della seconda*.

35. Siccome è necessario sovente il decomporre una quantità ne' suoi fattori, e lasciar sempre in evidenza, quanto mai sia possibile, la formazione delle quantità, che si considerano, non si effettuan le operazioni algebriche se non che quando non possiamo assolutamente dispensarcene, e bisogna, per questa ragione, stabilire de' segni proprî ad indicare la moltiplicazione tra le quantità complesse.

Ci serviamo infatti delle parentesi, fra le quali racchiudonsi i differenti fattori del prodotto indicato. L'espressione

$$(5a^4-3a^2b^2+b^4)(4ab^2-ac^2+d^3)(b^2-c^2),$$

per esempio, indica il prodotto delle quantità complesse

$$5a^4-3a^2b^2+b^4,\ 4ab^2-ac^2+d^3,\ \text{e}\ b^2-c^2.$$

Alcuni autori di data un poco remota si sono serviti di linee poste al di sopra dei fattori, come si vede qui sotto,

$$\overline{5a^4-3a^2b^2+b^4}\times\overline{4ab^2-ac^2+d^3}\times\overline{b^2-c^2};$$

ma le linee potendo riuscire prolungate più, o meno di quel che sia necessario, rendono questo segno men preciso delle parentesi, che non lascian mai equivoco sulla totalità delle quantità comprese in ciascun fattore: perciò esse hanno prevalso.

Della divisione delle quantità algebriche.

36. La divisione algebrica debb' essere considerata, nello stesso modo che la divisione aritmetica, come una operazione, che serve a discoprire uno dei fattori di un prodotto dato, allorchè conoscesi l'altro. Dopo di questa definizione, il quoziente moltiplicato pel divisore deve riprodurre il dividendo.

Applicando queste nozioni alle quantità monomie, vedremo pel n.° 21. che il dividendo è composto dai fattori del divisore, e da quelli del quoziente; dunque, *sopprimendo nel dividendo tutti i fattori*, *che compongono il divisore*, *il resultato sarà il quoziente*, *che si cerca*.

Sia, per esempio, il monomio $72a^5b^3c^2d$ da dividersi per l'altro monomio $9a^3bc^2$; bisogna, secondo la regola enunciata qui sopra, sopprimere nella prima di queste quantità i fattori della seconda, che son respettivamente

$$9, a^3, b, e\ c^2:$$

bisogna dunque, perchè la divisione possa effettuarsi, che questi fattori sieno nel dividendo. E prendendoli per ordine, si vede primieramente che il coefficiente 9 del divisore debb' esser fattore del coefficiente 72 del dividendo; ovvero che 9 deve dividere esattamente 72; il che difatto succede, poichè $72=9\times8$: sopprimendo dunque il fattore 9, resterà il fattore 8 per coefficiente del quoziente.

Segue ancora dalle regole della moltiplicazione (25) che l'esponente 5 della lettera a nel dividendo è la somma degli esponenti che essa ha nel divisore, e nel quoziente; quest'ultimo esponente sarà perciò la differenza tra gli altri due, ovvero $5-3=2$: così la lettera a avrà, nel quoziente, l'esponente 2. Per la stessa ragione, la lettera b avrà nel quoziente un esponente eguale a $3-1$, o sivvero 2. Finalmente il fattore c^2 essendo comune al dividendo, ed al divisore, deve esser soppresso; ed avremo, per conseguenza

$$8a^2b^2d$$

pel domandato quoziente.

Si ragionerà nella stessa maniera sopra qualunque altro esempio, e concluderemo da ciò che precede, che, *per effettuare la divisione delle quantità monomie, bisogna dividere il coefficiente del dividendo per quello del divisore:*

Sopprimere nel dividendo le lettere, che egli ha comuni col divisore, allorquando esse hanno il medesimo esponente; ed allorquando l'esponente non è lo stesso, togliere l'esponente del divisore da quello del dividendo; il resto sarà l'esponente, che deve avere la lettera nel quoziente:

Finalmente scrivere nel quoziente le lettere del dividendo, che non si trovano nel divisore.

37. Applicando la regola che ora abbiamo data per formare l'esponente delle lettere del quoziente, a una lettera, che avesse il medesimo esponente nel dividendo, e nel divisore, si troverebbe zero per l'esponente, che essa dovrebbe aver nel quoziente: a^3 diviso per a^3, per esempio, darebbe a^0. Affin di sapere ciocchè possa significare una tale espressione, bisogna risalire alla sua origine, e considerare che, rappresentando il quoziente della divisione della quantità a^3 per se stessa, ella deve corrispondere all'unità, che indica appunto quante volte una quantità qualunque è contenuta in se stessa. Procede da ciò, che *l'espressione a^0 è un simbolo equivalente*

all' unità , ed al quale si deve in conseguenza sostituire. 1. Possiamo dunque dispensarci da scriver le lettere , che hanno zero per esponente , perocchè allora ciascuna delle medesime non rappresenta che l' unità. Così a^3bc^2 diviso per a^2bc^2 dando $a^1b^0c^0$, si riduce ad a , come possiamo ancora assicurarcene effettuando la soppressione dei fattori comuni al dividendo , ed al divisore.

Si vede da ciò che la seguente proposizione , cioè , *ogni quantità , che ha zero per esponente , equivale a* 1 , non è a parlar propriamente che la spiegazione di un resultato , al quale conduce la convenzione stabilita sulla maniera di scrivere le potenze delle quantità mediante i loro esponenti.

Perchè la divisione possa effettuarsi , bisogna 1.° che il divisore non contenga nessuna lettera , che non si trovi nel dividendo ; 2.° che l'esponente delle lettere nel divisore non sorpassi quello , che esse hanno nel dividendo ; 3.° finalmente che il coefficiente del divisore divida esattamente quello del dividendo.

38. Quando tutte queste condizioni non hanno luogo la divisione non può che indicarsi sotto la forma di una frazione , secondo la convenzione del num.° 2 ; e bisogna cercare in seguito di simplificare questa frazione sopprimendo i fattori , che son comuni nel medesimo tempo al dividendo , ed al divisore , se ve ne sono ; poichè (*Aritm.* 57) è patente che i principî , sopra i quali riposa la teoria delle frazioni aritmetiche , essendo indipendenti da qualunque valore particolare de' loro termini , convengono alle frazioni rappresentate dalle lettere , come a quelle che sono espresse dai numeri.

Dietro a questi principî ; *si sopprimono primieramente i fattori numerici comuni ai coefficienti del dividendo , e del divisore ; poi le lettere , che sono comuni al dividendo , ed al divisore , e che hanno il medesimo esponente nell' uno , e nell' altro. Allorchè l' esponente non è lo stesso , si toglie il più piccolo dal più grande , e si dà questo resto per esponente alla lettera , che non si scrive che in quel dei due termini della frazione dove essa aveva l' esponente più grande.*

L'esempio seguente schiarirà questa regola.

Sia $48a^3b^5c^2d$ da dividersi per $64a^3b^3c^4e$; il quoziente non può indicarsi che sotto la forma frazionaria ,

$$\frac{48a^3b^5c^2d}{64a^3b^3c^4e} ;$$

ma siccome i coefficienti 48 , e 64 sono ambedue divisibili per 16 , sopprimendo questo fattore comune , il coefficiente del numeratore diverrà 3 , e quello del denominatore 4.

La lettera a avendo il medesimo esponente 3 nei due termini della frazione, ne segue che a^3 è un fattore comune al divideudo, ed al divisore, e che si può parimente sopprimere.

Passaudo in seguito alla lettera b bisogna dividere la potenza più elevata, che è b^5, per b^3, secondo la regola data qui sopra, ed il quoziente b^2 c' insegna che $b^5 = b^3 \times b^2$. Sopprimendo dunque il fattore comune b^3, resterà nel numeratore il fattore b^2.

Per rapporto alla lettera c, il fattore più elevato essendo c^4 nel denominatore, se si divida per c^2, lo decomporremo in $c^2 \times c^2$; e sopprimendo il fattore c^2, comune ai due termini questa lettera sparirà dal numeratore, ma resterà nel dominatore coll' esponente 2.

Finalmente le lettere d, ed e resteranno nei loro posti respettivi, poichè nello stato, in cui esse sono, non indicano alcun fattore, che sia comune ai due termini della frazione.

Mediante queste diverse operazioni la frazione proposta riducesi a

$$\frac{3b^2d}{4c^2e},$$

ch'è la sua più semplice espressione sin a tanto che non si dà alcun valore numerico alle lettere: imperocchè la detta frazione potrebbe anco di più esser ridotta se a queste lettere venissero sostituiti dei numeri contenenti fattori comuni.

39. Non deve ommettersi di osservare che se tutti i fattori del dividendo entrassero nel divisore, il quale di più ne contenesse ancora degli altri, che gli fossero particolari, sarebbe necessario, dopo la soppressione de' primi fattori, metter l'unità in luogo del dividendo, o numeratore della frazione. Difatti, in questo caso possiam sopprimere nei due termini della frazione tutti i fattori del numeratore, e vale a dire, dividere i due termini della frazione pel numeratore; ma quest'ultimo essendo diviso per se medesimo, deve dar l'unità per quoziente, di cui bisogna farne il nuovo numeratore.

Sia, per esempio, la frazione

$$\frac{4a^2bc}{12a^2b^3cd},$$

i fattori 12, a^2, b^3, e c si dividono respettivamente pei fattori 4, a^2, b, e c, ed è come se si dividessero i due termini della frazione proposta pel numeratore $4a^2bc$: ora, la quantità $4a^2bc$ divisa per se stessa dà 1 per quoziente, e la quantità $12a^2b^3cd$ divisa per la prima dà, in virtù delle regole precitate, $3b^2d$: la nuova frazione è dunque

$$\frac{1}{3b^2d}.$$

40. Segue dalle regole della moltiplicazione che, quando una quantità monomia moltiplica una quautità polimonia, essa divien fattore comune di tutti i termini di quest' ultima. Si profitta di tal' osservazione per simplificar le frazioni, di cui il numeratore, ed il denominatore sono dei polinomî, che han dei fattori comuni a tutti i lor termini.

Sia l' espressione

$$\frac{6a^4-3a^2bc+12a^2c^2}{9a^2b-15a^2c+24a^3};$$

esaminando la quantità $6a^4-3a^2bc+12a^2c^2$, si vede che il fattore a^2 è comune a tutti i suoi termini, poichè $a^4=a^2\times a^2$, ed inoltre i numeri 6, 3, e 12 son tutti divisibili per 3; di maniera che

$$6a^4-3a^2bc+12a^2c^2=2a^2\times 3a^2-bc\times 3a^2+4c^2\times 3a^2.$$

Parimente il denominatore ha per fattor comune $3a^2$, perchè i fattori a^2, e 3 entrano in tutti i suoi termini, ed abbiamo

$$9a^2b-15a^2c+24a^3=3b\times 3a^2-5c\times 3a^2+8a\times 3a^2.$$

Sopprimendo dunque il fattore $3a^2$ sì nel numeratore, che nel denominatore, la frazione proposta diverrà

$$\frac{2a^2-bc+4c^2}{3b-5c+8a}.$$

41. Passo adesso al caso dove il dividendo, ed il divisore son ambedue complessi, e nel quale non si può più conoscere a prima vista se il divisore è, o non è fattore del dividendo.

Poichè il divisore, moltiplicato pel quoziente, deve riprodurre il dividendo, bisogna che quest' ultimo contenga tutti i prodotti parziali di ciascun termine del divisore per ciascun termine del quoziente; e, se si potessero trovare i prodotti formati da ciascun termine del divisore in particolare, dividendoli per questo termine, ch' è cognito, si otterrebbero quelli del quoziente, nella medesima maniera che in Aritmetica si scoprono tutte le cifre del quoziente, dividendo successivamente pel divisore i numeri, che si riguardano come i prodotti parziali di questo divisore per le diverse cifre del quoziente. Ma nei numeri questi prodotti parziali si presentan per ordine, principiando dalle unità situate nell' ultimo posto sulla sinistra, a motivo della subordinazione stabilita tra le unità di ciascuna cifra del dividendo dipendentemente dal posto, che

esse occupano. Non vale il medesimo in Algebra, ma vi si supplisce col dispor tutti i termini del dividendo, e del divisore in modo che gli esponenti delle potenze dell' istessa lettera diminuiscano in ciascun termine, andando dalla sinistra verso la destra nel modo che vedesi, per rapporto alla lettera a, nelle quantità

$$5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5,$$
$$5a^4-2a^3b+4a^2b^2,$$

delle quali una è il prodotto, e l'altra il moltiplicando nell'operazione del n.° 32: questo è ciò, che si dice *ordinare* le quantità proposte.

Allorchè esse sono così disposte, è evidente che, qualunque sia il fattore, per cui bisogna moltiplicar la seconda, onde ottenerne la prima, il termine $5a^7$, col quale questa comincia, resulta dal termine $5a^4$, col quale comincia l'altra, moltiplicato pel termine ove a avesse il più alto esponente nel fattore cercato, e che trovasi il primo in questo fattore allorchè egli è ordinato per rapporto ad a. Dividendo dunque il monomio $5a^7$ pel monomio $5a^4$, il quoziente a^3 sarà il primo termine del fattore cercato. Ora, per le regole della moltiplicazione, il prodotto totale dovendo contenere i diversi prodotti parziali resultanti dalla moltiplicazione di tutto il moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, ne segue che la quantità presa qui come dividendo, deve contenere i prodotti di tutti i termini del divisore $5a^4-2a^3b+4a^2b^2$ per a^3 primo termine del quoziente; ed in conseguenza, se si tolgono dal dividendo questi prodotti, che sono $5a^7-2a^6b+4a^5b^2$, il resto $-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$ non conterrà altri termini se non quelli, che resultano dalla moltiplicazione del divisore pel secondo, terzo ec. termini del quoziente.

Questo resto può dunque essere considerato come un divisore parziale; ed il suo primo termine, nel quale a ha l'esponente più alto, non ha potuto derivare che dalla moltiplicazione del primo termine del divisore pel secondo del quoziente. Ma il primo termine del dividendo parziale avendo il segno $-$, bisogna assegnar quello, che deve avere il termine, che gli corrisponde nel quoziente: ora questo è assai facile mercè la 1.a regola del n.° 31; perchè la quantità $-20a^6b$, riguardata come un prodotto parziale, avendo un segno contrario a quello del moltiplicando parziale $5a^4$, ne resulta che il moltiplicatore parziale ha dovuto essere affetto dal segno $-$. La divisione essendo dunque eseguita sopra i monomi $-20a^6b$, e $5a^4$, darà $-4a^2b$ per questo secondo termine. Se si moltiplichi esso termine per tutti quelli del divisore, e si tolga il

prodotto dal dividendo parziale, il resto $+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ altro non conterrà che i prodotti del divisore pel terzo, e successivi termini del quoziente.

E riguardando questo resto come un nuovo dividendo parziale, il suo primo termine $10a^4b^3$ non può essere che il prodotto del primo termine del divisore pel terzo termine del quoziente; e per conseguenza quest'ultimo si otterrà dividendo l'uno per l'altro i monomi $10a^4b^3$, e $5a^4$. Il quoziente $2b^3$ essendo moltiplicato per tutto il divisore, dà dei prodotti, la cui sottrazione esaurendo il dividendo parziale, prova che il quoziente non ha che tre termini.

Se egli avesse dovuto averne un maggior numero, si sarebbero evidendemente trovati come i precedenti; e se, come si suppone, il dividendo ha per fattore il divisore, la sottrazion del prodotto di questo divisore per l'ultimo termine del quoziente deve sempre esaurire l'ultimo dividendo parziale.

42. Per facilitare la pratica delle regole trovate qui sopra: 1.° *Si dispongono il dividendo, ed il divisore come per la divisione de' numeri, ordinandoli ambedue per rapporto ad una medesima lettera, e vale a dire, scrivendo i lor termini in modo che gli esponenti di questa lettera vadano decrescendo:*

2.° *Si divide il primo termine del dividendo pel primo termine del divisore, e si scrive il resultato nel posto stabilito pel quoziente:*

3.° *Si moltiplica tutto il divisore pel quoziente parziale, che abbiamo trovato; si toglie dal dividendo; e si fa la riduzione de' termini simili:*

4.° *Si riguarda questo resto come un nuovo dividendo, di cui si divide il primo termine pel primo termine del divisore; si scrive il resultato come un secondo termine del quoziente; e si prosegue l'operazione sopra questo termine come qui sopra, fino a tanto che tutti i termini del dividendo sien esauriti.*

E osservando che un prodotto ha il medesimo segno del moltiplicando allorchè il moltiplicatore ha il segno $+$, e che, nel caso contrario, ha il segno $-$ (31), se ne conclude che *quando il dividendo parziale, ed il primo termine del divisore hanno il medesimo segno, il quoziente deve avere il segno* $+$; *e se essi hanno dei segni contrari, il quoziente deve avere il segno* $-$: questa è la regola dei segni.

Le divisioni parziali si effettuano col mezzo delle regole date per le quantità monomie.

Si divide il coefficiente del dividendo per quello del divisore: questa è la regola dei coefficienti.

Si scrivono nel quoziente le lettere comuni al dividendo, ed

al divisore con un esponente uguale alla differenza di quelli, dai quali son affette in questi due termini ; *e finalmente le lettere* , *le quali non sono che nel dividendo* : son queste le regole per le lettere , e per gli esponenti.

43. Ad oggetto d' applicar queste regole alle quantità

$$5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5,$$
$$5a^4-2a^3b+4a^2b^2,$$

le quali m' hanno servito d' esempio qui sopra , le disporrò come se si trattasse d' effettuare la divisione aritmetica.

Dividendo	*Divisore*
$5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$	$5a^4-2a^3b+4a^2b^2$
$-5a^7+2a^6b-4a^5b^2$	*Quoziente*
	$a^3-4a^2b+2b^3$
Resto $-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$	
$+20a^6b-8a^5b^2+16a^4b^3$	
Resto $+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$	
$-10a^4b^3+4a^3b^4-8a^2b^5$	
Resto 0	

Il segno del primo termine $5a^7$ del dividendo essendo lo stesso che quello di $5a^4$, primo termine del divisore , si dovrebbe mettere nel qnoziente il segno $+$; ma siccome si tratta del primo termine , ommetteremo questo segno.

Dividendo $5a^7$ per $5a^4$, si ha per quoziente a^3 , che scriveremo sotto del divisore.

Moltiplicando successivamente i tre termini del divisore pel primo termine a^3 del quoziente , e scrivendo i prodotti sotto i termini corrispondenti del dividendo , dopo d' aver cangiati i segni di questi prodotti affin di sottrarli (20) , formeremo la qnantità

$$-5a^7+2a^6b-4a^5b^2,$$

della quale faremo la riduzione col dividendo , e ne otterremo per resto

$$-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5.$$

Continuando la divisione su questo resto , il primo termine $-20a^6b$ diviso per $5a^4$ darà per quoziente $-4a^2b$, avendo questo quoziente il segno $-$ a causa che il dividendo , ed il divisore hanno segni diversi. Moltiplicandolo per tutti i

termini del divisore, e cangiando i segni, formerassi la quantità

$$20a^6b-8a^5b^2+16a^4b^3,$$

della quale faremo la riduzione col dividendo, e conseguiremo per resto

$$+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5.$$

Dividendo il primo termine $10a^4b^3$ di questo nuovo dividendo parziale, pel primo termine $5a^4$ del divisore; moltiplicando pel resultato $+2b^3$ tutto il divisore; scrivendo i prodotti sotto il dividendo parziale; avvertendo di cangiar loro il segno, e facendo la riduzione, non resta niente, il che fa vedere che $+2b^3$ è l'ultimo termine del quoziente cercato, il quale ha in conseguenza per espressione $a^3-4a^2b+2b^3$.

44. È a proposito d'osservare che nella divisione le moltiplicazioni de' differenti termini del quoziente pel divisore producono spesso de' termini, che non si trovano nel dividendo, e che bisogna dividerli in seguito pel primo termine del divisore. Questi termini son quelli, che si sono distrutti allorchè abbiamo formato il dividendo con la moltiplicazione de' suoi fattori, quoziente e divisore. Ecco un esempio notabile di riduzioni siffatte

Sia a^3-b^3 da dividersi per $a-b$:

Divisione		*Moltiplicazione*
a^3-b^3	$a-b$	$a-b$
$-a^3+a^2b$	a^2+ab+b^2	a^2+ab+b^2
$+a^2b-b^3$		a^3-a^2b
$-a^2b+ab^2$		$+a^2b-ab^2$
$+ab^2-b^3$		$+ab^2-b^3$
$-ab^2+b^3$		
0		*Resultato* a^3-b^3.

Il primo termine a^3 del dividendo, diviso pel primo termine a del divisore, dà per quoziente a^2, moltiplicando questo quoziente pel divisore, e cangiando i segni de' prodotti, si trova $-a^3+a^2b$: il termine $-a^3$ distrugge il primo termine del dividendo, ma resta il termine a^2b, che non si trovava nel dividendo. Siccome questo contiene la lettera a, si può dividerlo pel primo termine del divisore, e se ne ottiene $+ab$. Moltiplicando questo quoziente pel divisore, e cangiando i

segni dei prodotti, avremo $-a^2b+ab^2$: il termine $-a^2b$ distrugge il precedente, ma resta il termine $+ab^2$, che parimente non si trovava nel dividendo; si divida ancora questo per a, avremo per quoziente $+b^2$; moltiplicando questo quoziente parziale pel divisore, avremo, cangiando i segni, $-ab^2+b^3$: il primo termine $-ab^2$ distruggerà il precedente, ed il secondo $+b^3$ distruggerà l'ultimo termine $-b^3$, che restava del dividendo.

Per ben comprendere il meccanismo della divisione, serve di gettar gli occhi sulla moltiplicazion del quoziente a^2+ab+b^2 pel divisore $a-b$, posta a fianco alla division precedente; vedremo che tutti i termini riprodotti nelle divisioni parziali son quelli, che si distruggono nel resultato della moltiplicazione.

45. Succede qualche volta che la quantità, rapporto alla quale si è ordinato, si trova alzata alla medesima potenza in più termini, sì del dividendo, come del divisore. In tal caso bisogna disporre in una medesima colonna, ovvero scrivere immediatamente in seguito gli uni degli altri questi termini, osservando d'ordinarli tra loro per rapporto ad un'altra lettera.

Sia $-a^4b^2+b^2c^4-a^2c^4-a^6+2a^4c^2+b^6+2b^4c^2+a^2b^4$, da dividersi per $a^2-b^2-c^2$.

Ordinando la prima di queste quantità per rapporto alla lettera a, si porranno in una medesima colonna i termini $-a^4b^2+2a^4c^2$, in un'altra i termini $+a^2b^4-a^2c^4$, e finalmente nell'ultima colonna i tre termini $+b^6$, $+2b^4c^2$, $+b^2c^4$, ordinandoli per rapporto alla lettera b, come si vede nella pagina seguente.

Il primo termine $-a^6$ del dividendo essendo diviso pel primo termine a^2 del divisore, dà $-a^4$ per primo termine del quoziente; formando in seguito, i prodotti di questo quoziente per tutti i termini del divisore, cangiando i segni di questi prodotti, onde toglierli dal dividendo; e ponendo in una medesima colonna i termini affetti dalla stessa potenza di a, si ottiene, dopo la riduzione de' termini simili, il primo resto, che prenderemo per secondo dividendo parziale.

Il primo termine $-2a^4b^2$ di questo nuovo dividendo essendo diviso per a^2, dà per secondo termine del quoziente $-2a^2b^2$; formando in seguito i prodotti di questo quoziente per tutti i termini del divisore, cangiando i segni di questi prodotti per toglierli dal dividendo parziale, e ponendo in una stessa colonna i termini affetti dalla medesima potenza di a, proviene, dopo fatta la riduzione de' termini simili, il 2.° resto, che prenderemo per un terzo dividendo parziale.

L' operazione continuandosi nella stessa maniera sopra il 2.° resto, e sopra i seguenti, troveremo ancora tre termini del quoziente. L' ultimo essendo moltiplicato per tutti i termini del divisore, dà dei prodotti, che, tolti dal 4.° resto, lo distruggono interamente; la divisione si fa dunque esattamente, ed in conseguenza il divisore è fattore del dividendo.

$$\begin{array}{l|l}
-a^6-a^4b^2+a^2b^4+b^6 & a^2-b^2-c^2 \\
\quad +2a^4c^2-a^2c^4+2b^4c^2 & \hline \\
\qquad\qquad\qquad +b^2c^4 & -a^4-2a^2b^2-b^4 \\
+a^6-a^4b^2 & \quad +a^2c^2-b^2c^2 \\
\quad -a^4c^2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\hline
1.^\circ \textit{resto} -2a^4b^2+a^2b^4+b^6 \\
\qquad +a^4c^2-a^2c^4+2b^4c^2 \\
\qquad\qquad\qquad +b^2c^4 \\
\quad +2a^4b^2-2a^2b^4 \\
\qquad\quad -2a^2b^2c^2 \\
\hline
2.^\circ \textit{resto} +a^4c^2-a^2b^4+b^6 \\
\qquad\quad -2a^2b^2c^2+2b^4c^2 \\
\qquad\quad -a^2c^4+b^2c^4 \\
\quad -a^4c^2+a^2b^2c^2 \\
\qquad +a^2c^4 \\
\hline
3.^\circ \textit{resto} \quad -a^2b^4+b^6 \\
\qquad\quad -a^2b^2c^2+2b^4c^2 \\
\qquad\qquad\qquad +b^2c^4 \\
\qquad +a^2b^4-b^6 \\
\qquad\qquad\quad -b^4c^2 \\
\hline
4.^\circ \textit{resto} \quad -a^2b^2c^2+b^4c^2 \\
\qquad\qquad\qquad +b^2c^4 \\
\qquad +a^2b^2c^2-b^4c^2 \\
\qquad\qquad\qquad -b^2c^4 \\
\hline
\qquad\quad 0 \qquad\qquad 0
\end{array}$$

46. Si facilita qualche volta la divisione decomponendo a colpo d' occhio una quantità ne' suoi fattori. Se s' avesse, per esempio, $8a^6-4a^3b^2+4a^3+2a^3-b^2+1$ da dividere per $2a^3-b^2+1$, questo divisore formando i tre ultimi termini del dividendo, servirebbe cercare s' egli sia fattor dei tre primi; ma questi ultimi hanno visibilmente per fattor comune $4a^3$, poichè $8a^6-4a^3b^2+4a^3=4a^3(2a^3-b^2+1)$. Mediante quest' osservazione il dividendo diventerà.

$$4a^3(2a^3-b^2+1)+2a^3-b^2+1,$$

ovvero $$(2a^3-b^2+1)(4a^3+1):$$

la divisione s' effettuerebbe dunque immediatamente sopprimendo il fattore $2a^3-b^2+1$ eguale al divisore, ed il quoziente sarebbe $4a^3+1$.

L' abitudine al calcolo algebrico suggerisce moltissime osservazioni di questo genere, per mezzo delle quali si abbreviano le operazioni.

Ed esercitandosi molto si arriva facilmente a conoscere le decomposizioni in fattori; questi spesso si rendono evidentissimi allorchè in vece di effettuare le moltiplicazioni, che si presentano, non si fa altro che indicarle.

Delle Frazioni algebriche.

47. Quando s' applica il metodo della divisione algebrica a due quantità, di cui l' una non è fattore dell' altra, si riconosce l' impossibilità d' effettuarla, perchè si arriva nel corso delle operazioni, ad un resto, di cui il primo termine non può esser diviso per quello del divisore. Eccone un esempio:

$$\begin{array}{l|l} a^3+a^2b+2b^3 & a^2+b^2 \\ -a^3-ab^2 & \overline{a+b} \\ \hline \text{1.° resto} \quad a^2b-ab^2+2b^3 & \\ -a^2b-b^3 & \\ \hline \text{2.° resto} \quad -ab^2+b^3. & \end{array}$$

Il primo termine $-ab^2$ del secondo resto non può dividersi per a^2, primo termine del divisore; così la divisione s' arresta a questo punto. Si potrebbe, come nell' Aritmetica, unire al quoziente $a+b$ la frazione $\frac{-ab^2+b^3}{a^2+b^3}$, che ha per numeratore il resto, e per denominatore il divisore; ed il quoziente sarebbe

$$a+b+\frac{b^3-ab^2}{a^2+b^2}.$$

Si vede facilmente che *la divisione deve arrestarsi quando si arriva ad un resto, di cui il primo termine non contiene la lettera, per raporto alla quale si è ordinato*, se non che

elevata ad una potenza inferiore a quella della medesima lettera nel primo termine del divisore.

48. Allorchè la divisione algebrica di due quantità non può effettuarsi, l'espression del quoziente resta indicata sotto una forma frazionaria, prendendo il dividendo pel numeratore, ed il divisore pel denominatore; ed affin di ridurla al maggior grado di semplicità possibile, bisogna cercare se il dividendo, ed il divisore hanno de' fattori comuni per sopprimerli (38). Ma quando si tratta di polinomî i fattori comuni non si scoprono con la medesima facilità che nei monomî; non si trovano in generale che cercando, con un metodo analogo a quello, che abbiamo spiegato in Aritmetica pei numeri, il *massimo comune divisore* di due quantità proposte.

Non si possono assegnar le grandezze relative dell' espressioni algebriche fino a che non si dàn de' valori alle lettere, ch' esse contengono; la denominazione del *massimo comun divisore*, applicata a queste espressioni non deve dunque esser presa rigorosamente nel medesimo senso come nell' Aritmetica.

In Algebra bisogna intendere pel *massimo comune divisore* di due espressioni quello de' lor divisori comuni, che contien più fattori in tutti i suoi termini, ovvero ch' è di grado più alto (27). La sua determinazione riposa, come in Aritmetica, sopra questo principio: *Qualunque divisor comune a due quantità deve dividere ancora il resto della lor divisione.*

La dimostrazione, che n' abbiam data nel n.° 61. dell' Aritmetica, diviene più chiara allorchè vi s' impiegano i simboli algebrici. Infatti sieno A e B le due quantità proposte, D il loro divisore comune; Q il quoziente della divisione di A per B, ed R il resto; si avrà

$$A=BQ+R;$$

poi dividendo i due membri di questa equazione pel divisore comune D, avremo

$$\frac{A}{D}=\frac{BQ}{D}+\frac{R}{D};$$

e se si faccia $\frac{A}{D}=a$, $\frac{B}{D}=b$, quozienti esatti per l' ipotesi; cangeremo l' equazione qui sopra in

$$a=bQ+\frac{R}{D}, \text{ d' onde } a-bQ=\frac{R}{D}.$$

passando il termine bQ nel primo membro. Ora poichè il primo membro, che in questo caso dev' esser composto de' medesimi termini del secondo, è adesso un intero bisogna che R sia divisibile esattamente per D.

Reciprocamente qualunque divisore comune alle quantità B e R deve dividere A: poichè se si fa

$$\frac{B}{D}=b, \frac{R}{D}=r, \text{ l' equazione } \frac{A}{D}=\frac{BQ}{D}+\frac{R}{D} \text{ divenendo}$$

$$\frac{A}{D}=bQ+r,$$

ne segue che A è necessariamente divisibile per D, quando b e r sono degl' interi.

Dietro a questi principî *si comincerà*, come in Aritmetica, *dal cercare se una delle quantità sia essa stessa divisore dell' altra; se la divisione non si fa esattamente, si dividerà il primo divisore pel resto, e così di seguito: e quello dei resti, che dividerà esattamente il precedente, sarà il massimo comun divisore delle due quantità proposte*: ma sarà necessario fare nelle divisioni indicate delle osservazioni, le quali dipendono dalla natura delle quantità algebriche.

Non si deve primieramente cercare il divisor comune di due espressioni algebriche se non quando esse hanno delle lettere comuni; bisogna sceglierne una, per rapporto alla quale si ordineranno l' espressioni proposte; e prenderemo per dividendo quella, ove questa lettera avrà il più alto esponente; l'altra sarà il divisore.

Sieno le due quantità

$$3a^3-3a^2b+ab^2-b^3;$$
$$4a^2b-5ab^2+b^3$$

le quali sono di già ordinate per rapporto alla lettera a; prenderemo la prima per dividendo, e la seconda per divisore. Presentasi, nel principio dell' operazione, una difficoltà, che non s' incontra nei numeri, ed è che il primo termine del divisore non può dividere esattamente quello del dividendo, a causa dei fattori 4, b dell' uno, i quali non sono nell' altro. Ma la lettera b essendo comune a tutti i termini del divisore senza esserlo a tutti quelli del dividendo, ne segue (40) che b è fattore del divisore, e non lo è del dividendo; ora, ogni divisore comune a due quantità non può esser composto che de' fattori, che son comuni all' una, ed all' altra; dunque, se esiste un tal divisore tra le due quantità proposte,

esso non può trovarsi che tra i fattori della quantità $4a^2 - 5ab + b^2$, che resta quando abbiam tolto b dalla quantità $4a^2b - 5ab^2 + b^3$; così la questione riducesi a cercare il massimo comune divisore delle due quantità

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3,$$
$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Per la ragione medesima che abbiam potuto sopprimere in una delle quantità proposte il fattore b, che non entrava nell' altra, possiamo ancora introdurre in quest' ultima un nuovo fattore, purchè non sia fattor della prima. Con tale operazione il massimo comun divisore di queste quantità il quale non è formato che de' fattori comuni ad entrambe, non sarà punto alterato. Profitto di questa osservazione, onde moltiplicare la quantità $3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$ per 4, che non è fattore della quantità $4a^2 - 5ab + b^2$, affin di render possibile la divisione del primo termine dell' una pel primo termine dell' altra.

Avrò in questa maniera per dividendo la quantità

$$12a^3 - 12a^2b + 4ab^2 - 4b^3,$$

per divisore la quantità

$$4a^2 - 5ab + b^2,$$

ed il quoziente parziale sarà $3a$.

Moltiplicando il divisore per questo quoziente, e togliendo il prodotto dal dividendo, verrà per resto.

$$3a^2b + ab^2 - 4b^3,$$

quantità, che in conseguenza del principio già posto nel cominciamento di quest' articolo, deve pure avere con $4a^2 - 5ab + b^2$ lo stesso massimo comune divisore che la prima.

Profittando delle osservazioni fatte qui sopra, sopprimo il fattore b, comune a tutti i termini del resto suddetto, e lo moltiplico per 4, affine di render possibile la divisione del suo primo termine per quello del divisore. Ho allora per dividendo la quantità

$$12a^2 + 4ab - 16b^2,$$

e per divisore la quantità

$$4a^2 - 5ab + b^2;$$

il quoziente parziale è 3.

Moltiplicando il divisore pel quoziente, e togliendo il prodotto dal dividendo, abbiamo per resto

$$19ab - 19b^2;$$

e la questione è ridotta a cercare il massimo comun divisore tra questa quantità, e

$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Ma la lettera a, per rapporto alla quale si fa la divisione, non essendo più nel resto che al primo grado, mentre che

essa è al secondo nel divisore, quest' ultimo è quello, che bisogna prendere per dividendo, e del resto dobbiamo farne il divisore.

Prima di cominciar questa nuova divisione sopprimo nel divisore $19ab-19b^2$ il fattore $19b$ comune a tutti i suoi termini, e che non è fattore del dividendo; ho dunque per dividendo la quantità

$$4a^2-5ab+b^2$$

e per divisore

$$a-b.$$

La divisione si opera esattamente, dunque $a-b$ è il massimo comun divisore richiesto.

E risalendo dall' ultima divisione fino alla prima, si dimostrerebbe *a posteriori* che la quantità $a-b$ deve dividere esattamente le due quantità proposte, e che essa debb' essere la più composta di quelle, che possan dividerle; e dividendo per $a-b$ le due quantità proposte,

$$3a^3-3a^2b+ab^2-b^3\ ,\quad 4a^2b-5ab^2+b^3\ ,$$

esse si decompongono nel modo, che segue:

$$(3a^2+b^2)(a-b)\ ,\quad (4ab-b^2)(a-b).$$

49. Allorchè la quantità, che si prende per divisore, contiene più termini, ove la lettera, per rapporto alla quale si è ordinato, si trova al medesimo grado, vi è un' avvertenza da farsi, senza la quale l' operazione non si terminerebbe. Eccone un esempio.

Sieno le quantità

$$a^2b+ac^2-d^3\ ,\quad ab-ac+d^2\ ;$$

se si prepara l'operazione, come per una divisione ordinaria,

$$\begin{array}{l|l} a^2b+ac^2-d^3 & ab-ac+d^2 \\ -a^2b+a^2c-ad^2 & \overline{a} \\ \hline \text{resto}\quad a^2c+ac^2-ad^2-d^3, & \end{array}$$

dividendo primieramente a^2b per ab, si trova a per quoziente; moltiplicando il divisore per questo quoziente, e togliendone i prodotti dal dividendo, il resto conterrà un nuovo termine, ove a sarà al secondo grado, cioè a^2c proveniente dal prodotto di $-ac$ per a. L' operazione non avrà fatto in questa maniera nessun progresso; poichè, prendendo il resto $a^2c+ac^2-ad^2-d^3$ per dividendo, e moltiplicandolo per b, affine di render possibile la divisione per ab, si avrà

$$\begin{array}{l|l} a^2bc+abc^2-abd^2-bd^3 & ab-ac+d^2 \\ -a^2bc+a^2c^2-acd^2 & \overline{ac} \\ \hline \text{resto}\quad a^2c^2+abc^2-acd^2-abd^2-bd^3\ ; & \end{array}$$

ed il termine $-ac$ riprodurrà ancora un termine a^2c^2, ove a sarà al secondo grado.

Per evitar quest' inconveniente, bisogna osservare che il divisore $ab-ac+d^2=a(b-c)+d^2$; riunendo i termini $ab-ac$ in un solo, se si faccia per abbreviare i calcoli, $b-c=m$, avremo per divisore $am+d^2$; ma allora bisognerà moltiplicare tutto il dividendo $a^2b+ac^2-d^3$ pel fattore m, all' effetto di avere un nuovo dividendo, il cui primo termine sia divisibile per la quantità am, che forma il primo termine del divisore : l' operazione diventerà

$$\begin{array}{r|l} & a^2bm+ac^2m-d^3m \\ & -a^2bm-abd^2 \\ \hline \text{1.° resto} & -abd^2+ac^2m-d^3m \\ & -ac^2m-c^2d^2 \\ \hline \text{2.° resto} & -abd^2-c^2d^2-d^3m. \end{array} \quad \begin{array}{|l} am+d^2 \\ \hline ab+c^2 \end{array}$$

Questa volta i termini affetti da a^2 son tolti dal dividendo, e non restan altro che i termini affetti dalla prima potenza di a. Per farli sparire, divideremo primieramente il termine ac^2m per am, ed avremo per quoziente c^2; moltiplicando il divisore pel quoziente, e togliendo i prodotti dal dividendo, si avrà il 2.° resto: prendendo questo 2.° resto per nn nuovo dividendo, vi sopprimeremo il fattore d^2, che non è fattor del divisore; otterremo così

$$-ab-c^2-dm,$$

che moltiplicheremo di nuovo per m, e conseguiremo

$$\begin{array}{r|l} & -abm-c^2m-dm^2 \\ & +abm+bd^2 \\ \hline \text{resto} & +bd^2-c^2m-dm^2. \end{array} \quad \begin{array}{|l} am+d^2 \\ \hline -b \end{array}$$

Il resto $bd^2-c^2m-dm^2$ di questa ultima divisione non contenendo più a, ne segue che, se esiste tra le due quantità proposte un divisore comune, questo è indipendente dalla lettera a.

Arrivati a tal punto non si può più continuare la divisione per rapporto alla lettera a; ma osserveremo che, se veramente esista un comun divisore indipendente da a tra le quantità $bd^2-c^2m-dm^2$, ed $am+d^2$, bisogna ch'esso divida separatamente le due parti am, e d^2 del divisore; poichè, in generale, se una quantità è ordinata per rapporto alle potenze della lettera a, ogni divisore di questa quantità, indipendente da a, deve dividere separatamente le quantità, che moltiplicano le diverse potenze di questa lettera.

Per convincersene, serve far attenzione che, in questo caso, ciascuna delle quantità proposte debb' essere il prodotto di una quantità indipendente da a, pel divisore comune, che n'è indipendente. Ora, se si abbia, per esempio, l'espressione

$$Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E,$$

nella quale le lettere A, B, C, D, E indicano delle quantità qualunque indipendenti da a, e che si moltiplichi la medesima per una quantità M, anch'essa indipendente da a, il prodotto

$$MA^4+MBa^3+MCa^2+MDa+ME,$$

ordinato per rapporto ad a, conterrà pure le stesse potenze di a, come per l'avanti; ma il coefficiente di ciascuna di queste potenze sarà un multiplice di M.

Ciò posto, se si rimetta per m la quantità $b-c$, che quella lettera rappresenta, avremo le quantità

$$bd^2-c^2(b-c)-d(b-c)^2,$$
$$a(b-c)+d^2:$$

ora, è patente che $b-c$, e d^2 non hanno alcun fattore comune; dunque neppure le due quantità proposte hanno divisore comune.

Se non si fosse potuto conoscere dalla sola ispezione che non esisteva divisor comune tra $b-c$, e d^2, sarebbe stato necessario cercare il loro massimo comun divisore, ordinandole per rapporto a una medesima lettera, ed assicurarsi in seguito se questo divisore potesse dividere ancora la quantità.

$$bd^2-c^2(b-c)-d(b-c)^2.$$

50. In vece di rimandare alla fin della operazione la ricerca del massimo comun divisore indipendente dalla lettera, per rapporto alla quale si sono ordinate le due quantità, è più comodo di cercarlo in principio; perchè, il più sovente, i resti provenienti da ciascuna operazione si complicano a misura che si progredisce, ed il calcolo diviene di più in più laborioso.

Sieno per esempio, le quantità

$$a^4b^2+a^3b^3+b^4c^2-a^4c^2-a^3bc^2-b^2c^4,$$
$$a^2b+ab^2+b^3-a^2c-abc-b^2c;$$

dopo di averle ordinate rispetto alla lettera a, il che darà

$$(b^2-c^2)a^4+(b^3-bc^2)a^3+b^4c^2-b^2c^4,$$
$$(b-c)a^2+(b^2-bc)a+b^3-b^2c,$$

osservo primieramente che se esse hanno un divisore comune; che sia indipendente da a, bisogna che questo divida in par-

ticolare ciascuna delle quantità, che moltiplicano le diverse potenze di a (49), come pure le quantità $b^4c^2-b^2c^4$, e b^3-b^2c, che non contengono quella lettera.

Il problema dunque è ridotto a trovare i divisori comuni delle due quantità b^2-c^2, e $b-c$, ed a verificare in seguito se tra questi divisori ve ne sien alcuni, che possan dividere a un tempo

$$b^3-bc^2 \text{ e } b^2-bc,\ b^4c^2-b^2c^4 \text{ e } b^3-b^2c.$$

Dividendo b^2-c^2 per $b-c$, si trova un quoziente esatto $b+c$; $b-c$ è dunque divisore comune delle quantità b^2-c^2, e $b-c$, che patentemente non possono averne altri; poichè la quantità $b-c$ non è divisibile che per se stessa, e per l'unità. Bisogna dunque accertarsi se $b-c$ divida le altre quantità riportate qui sopra, ovvero, se divida nel medesimo tempo le due quantità proposte; ciò difatto succede, e si ottiene

$$(b+c)a^4+(b^2+bc)a^3+b^3c^2+b^2c^3,$$

$$a^2+ba+b^2.$$

Per ridurre quest'ultime espressioni al maggior grado possibile di semplicità, fa di mestieri provare se la prima sia divisibile per $b+c$; questa divisione essendo tentata riesce, e non si deve far altro se non che cercare il comun divisore di queste quantità semplicissime

$$a^4+ba^3+b^2c^2,$$

$$a^2+ba+b^2.$$

Ed operando sopra queste ultime quantità come lo prescrive la regola, si arriva, dopo la seconda divisione, ad un resto, che contiene la lettera a alzata solamente alla prima potenza, e siccome questo resto non è il comun divisore, concludiamo che la lettera a non fa parte del comun divisore cercato, il quale non è composto, per conseguenza, che del solo fattore $b-c$.

Se, oltre a questo comun divisore, se ne fosse trovato un altro, nel quale fosse contenuta la quantità a, serebbe bisognato moltiplicare questi due divisori l'uno per l'altro, affin di ottenere il massimo comun divisore cercato.

Queste osservazioni saranno bastanti, allorchè avremo acquistato qualche poco di abituazione nelle Analisi, per arrivare, in tutti i casi, al massimo comun divisore; e troveremo facilmente che le quantità

$$6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2,$$
$$9a^3b-27a^2bc-6abc^2+18bc^3$$

hanno per massimo comune divisore la quantità $3a^2-2c^2$.

51. Le quattro *operazioni fondamentali*, e vale a dire, l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, e la divisione, s'affettuano sopra le frazioni algebriche come sulle frazioni aritmetiche, osservando solamente di seguire, nelle operazioni prescritte dalle regole dell' Aritmetica, i metodi accennati qui sopra a riguardo delle quantità algebriche. Io mi limiterò dunque a richiamare adesso alla mente queste regole, dando un esempio dell' applicazion di ciascuna.

La somma delle frazioni

$$\frac{a}{d}, \quad \frac{b}{d}, \quad \frac{c}{d}$$

che hanno il medesimo denominatore, ovvero

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+b+c}{d} \quad (\textit{Aritm. } 65).$$

La differenza delle frazioni

$$\frac{a}{d}, \text{ e } \frac{b}{d}$$

che hanno il medesimo denominatore, ovvero

$$\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}.$$

L' intero a unito alla frazione $\frac{b}{c}$, ovvero l' espressione

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c} \quad (\textit{Aritm. } 67).$$

Parimente l' espressione

$$a-\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}.$$

Reciprocamente

l' espressione $\frac{ac+b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c}$;

l' espressione $\frac{bc-b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=a-\frac{b}{c}$ (*Aritm. 66.*).

52. Le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, essendo ridotte al medesimo denominatore, divengono respettivamente

$$\frac{ad}{bd},\ \frac{bc}{bd}$$ (*Arit. 68*).

Quando le frazioni proposte sono eguali, si ha $ad=bc$, dividendo allora i due membri per cd e chiamando q il quoziente, viene

$$\frac{ad}{cd}=\frac{a}{c}=q,\quad \frac{bc}{cd}=\frac{b}{d}=q,$$ dal che $a=cq$ $b=dq$

quindi, i due termini di una delle frazioni non sono che quelli dell'altra moltiplicati per un fattore comune.

Le frazioni

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f},\ \frac{g}{h},$$

per la medesima riduzione, diventano respettivamente

$$\frac{adfh}{bdfh},\ \frac{cbfh}{bdfh},\ \frac{ebdh}{bdfh},\ \frac{gbdf}{bdfh}$$ (*Aritm. 69.*).

Ho dato nel num. 69. dell'Arimetica un metodo per arrivare in certi casi ad un denominatore più semplice di quello che resulta dalla regola generale; i simboli algebrici ne facilitano molto l'applicazione, come adesso vedremo.

Per esempio, se si hanno le due frazioni $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, è facile l'osservare che i due denominatori sarebbero gli stessi se f fosse fattore del primo, e c fattor del secondo; moltiplicheremo dunque i due termini della prima frazione per f, e i due termini della seconda per c, il che darà le frazioni $\frac{af}{bcf}$, e $\frac{cd}{bcf}$, più semplici di $\frac{abf}{bbcf}$, e $\frac{bcd}{bbcf}$, che s'avrebbero moltiplicando pei denominatori primitivi.

Generalmente *si riuniscono in un solo prodotto, per comporre il denominatore comune, tutti i fattori differenti inalzati alla più alta potenza ch'essi hanno nei denominatori delle frazioni proposte; e non rest' altro che a moltiplicare il numeratore di ciascuna frazione pei fattori di questo prodotto i quali mancano nel denominatore della frazione.*

Avendo, per esempio, le frazioni $\frac{a}{b^2c}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$, formo il prodotto b^2cfg, moltiplico il numeratore della prima frazione per fg, quello della seconda per bcg, quello della terza per b^2f, ed ottengo

$$\frac{afg}{b^2cfg}, \frac{bcdg}{b^2cfg}, \frac{b^2ef}{b^2cfg}$$

53. Per la moltiplicazione, abbiamo

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b} \text{ (\textit{Aritm.} 53.).}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \text{ (\textit{Aritm.} 76).}$$

Per la divisione,

$\frac{a}{b}$ da dividersi per c, somministra $\frac{a}{bc}$, ovvero $\frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$ (*Aritm.* 54. 76);

$\frac{a}{b}$ da dividersi per $\frac{c}{d}$, somministra $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (*Aritm.* 80).

I termini delle frazioni precedenti erano monomî; ma se s'avessero delle frazioni, i cui termini fossero polinomî, altro non dovrebbesi fare fuorchè eseguire, col mezzo delle regole date per le quantità complesse, le operazioni indicate sopra i monomî; ed è perciò che avremo.

$$\frac{a^2+b^2}{c+d} \times \frac{a-b}{c-d} = \frac{(a^2+b^2)(a-b)}{(c+d)(c-d)}$$
$$= \frac{a^3+ab^2-a^2b-b^3}{c^2-d^2}.$$

Il quoziente della frazione

$$\frac{a^2+b^2}{c+d} \text{ divisa per } \frac{a-b}{c-d},$$

è

$$\frac{a^2+b^2}{c+d} \times \frac{c-d}{a-b} = \frac{(a^2+b^2)(c-d)}{(c+d)(a-b)},$$
$$= \frac{a^2c+b^2c-a^2d-b^2d}{ac+ad-bc-bd};$$

e così delle altre operazioni.

54. Allorchè ben si possegga tutto ciò, che precede, possiam risolvere un'equazione di primo grado, per quanto complicata essa sia.

Se s' avesse, per esempio, l' equazione

$$\frac{(a+b)(x-c)}{a-b}+4b=2x-\frac{ac}{3a+b},$$

comincerebbesi dal fare sparire i denominatori, indicandone solamente le operazioni; verrebbe allora

$$(a+b)(x-c)(3a+b)+4b(a-b)(3a+b)$$
$$=2x(a-b)(3a+b)-ac(a-b);$$

poi, effettuando le moltiplicazioni, si troverebbe

$$3a^2x+4abx+b^2x-3a^2c-4abc-b^2c$$
$$+12a^2b-8ab^2-4b^3=$$
$$6a^2x-4abx-2b^2x-a^2c+abc;$$

trasportando in un solo membro tutti i termini affetti da x, si otterrebbe

$$-3a^2x+8abx+3b^2x$$
$$=2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3;$$

donde concluderebbesi finalmente

$$x=\frac{2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3}{-3a^2+8ab+3b^2}$$

Dei problemi a due incognite, e delle quantità negative.

55. Nei problemi risoluti precedentemente non abbiam fatto entrare che una incognita sola, per mezzo della quale abbiamo espresso con le quantità cognite tutte le condizioni del problema. È spesso più comodo, per alcuni di questi problemi, d' impiegare due incognite; ma allora bisogna che s'abbiano, esplicitamente o implicitamente, due condizioni conducenti a formar due equazioni, senza delle quali non si potrebbero a un tempo determinar le due incognite.

Il problema del num. 3., sopratutto nel modo ch' è stato enunciato nel num. 4., si presenta naturalmente con due incognite, cioè l'uno, e l'altro de' numeri cercati. In fatti, se s' indicano

il più piccolo con x,
il più grande con y,
la loro somma con a,
la lor differenza con b,

avremo, per l' enunciato del problema,

$$x+y=a,$$
$$y-x=b.$$

Ciascuna di queste due equazioni, considerata, sola non può assolutamente determinare nessuna delle incognite. Se dalla secondo, per esempio, si ricava il valore di y, essa darà

$$y=b+x,$$

valore che a colpo d'occhio sembra nulla mostrarci di ciò che si cerca, poichè contiene la quantità x la quale non è data; ma se in luogo dell'incognita y si pone nella prima equazione questo suo valore, questa equazione non contenendo più allora che la sola incognita x, ne darà il valore coi metodi già insegnati.

Avremo difatto, per mezzo di questa sostituzione,

$$x+b+x=a,$$

oppure

$$2x+b=a,$$

o finalmente

$$x=\frac{a-b}{2},$$

e ponendo questo valore di x in quello di y, ch'è $b+x$, otterremo

$$y=b+x=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},$$

avremo dunque, pei due numeri incogniti, le medesime espressioni che nel num. 3.

È agevol vedere difatti che la soluzione qui sopra non differisce punto, circa alla sostanza, da quella del num. 3.; ho solamente impostata, e risoluta la seconda equazione $y-x=b$, ch'io m'era contentato sol d'eunnciare col linguaggio ordinario nel n.° precitato e da cui n'aveva concluso, **senza** calcolo algebrico, che il numero maggiore era $x+b$.

56. Sia proposto anche questo Problema.

Un Operaio lavorando presso un particolare per 12 giorni, ed avendo seco lui pei 7 primi giorni sua moglie col figlio, ha ricevuto 74 lire; ha lavorato in seguito, presso il medesimo particolare, altri 8 giorni, per 5 de' quali aveva seco la moglie col figlio, ed ha ricevuto per questo tempo 50 lire. Si domanda quanto guadagnava al giorno per la sua parte, e quanto guadagnavano insieme nel medesimo tempo sua moglie, e suo figlio.

Sia x il guadagno giornaliero del marito;

y quello della moglie, e del figlio;

12 giorni di lavoro del marito produrranno $12x$,

7 giorni della moglie col figlio daranno $7y$;

avremo dunque, per la prima condizione del Problema.

$$12x+7y=74;$$

8 giorni di lavoro del marito produrranno $8x$,

5 giorni della moglie col figlio daranno $5y$;

avremo dunque, per la seconda condizione del Problema,

$$8x+5y=50.$$

E ragionando qui nella stessa maniera come nel precedente problema, prenderanno il valore di y dalla prima equazione, ed avremo

$$y=\frac{74-12x}{7};$$

si porrà questo valore nella seconda, moltiplicandolo per 5, poichè vi è $5y$, verrà

$$8x+\frac{370-60x}{7}=50;$$

equazione, la quale non contien altro che la sola incognita x.
Risolvendola, avremo successivamente

$$56x+370-60x=350,$$
$$370-4x=350;$$

passando $-4x$ nel secondo membro, e 350 nel primo, otterremo

$$370-350=4x$$
$$20=4x$$
$$\frac{20}{4}=x$$
$$5=x.$$

Conoscendo x, che abbiamo trovato eguale a 5, se si pone questo valore nella formula,

$$y=\frac{74-12x}{7},$$

il secondo membro diverrà cognito; e si avrà

$$y=\frac{74-12\times5}{7}=\frac{74-60}{7}=\frac{14}{7}=2:$$

laonde $y=2$.

Il marito dunque guadagnava 5 lire al giorno, laddovechè la moglie col figlio non ne guadagnavano che 2.

57. Il Lettore avrà potuto osservare che, risolvendo qui sopra l'equazione $370-4x=350$, ho fatto passare $4x$ nel secondo membro: io ho operato in questo modo affin d'evitare non piccola difficoltà, che avrebbe avuto luogo senza di questo, e della quale ne do adesso lo schiarimento.

Lasciando $4x$ nel primo membro, e passando 370 nel secondo, avrebbesi

$$-4x=350-370;$$

e riducendo il secondo membro, a forma della regola del n.° 19, ne sarebbe resultato

$$-4x=-20.$$

Ma poichè abbiamo evitato nel num.° precedente il segno $-$, dal quale era affetta la quantità $4x$, passandola nell' altro membro; che parimente la quantità $350-370$ è divenuta $370-350$ cangiando membro; e finalmente poichè una quantità passando da un membro nell' altro cangia di segno (10), è evidente che possiamo arrivare ai medesimi resultati cangiando immediatamente il segno delle quantità $-4x$, e $+350-370$, il che darà

$$4x=-350+370,$$

ovvero

$$4x=370-350;$$

equazione, ch' è la stessa cosa di

$$370-350=4x.$$

Si può ancora non eseguire il cangiamento del segno fuorchè sull' ultimo resultato

$$-4x=-20;$$

e viene allora, come qui sopra,

$$4x=20.$$

Segue da ciò che *si potranno trasportare indifferentemente da un membro in un altro tutte le quantità affette dall' incognita; s' osserverà solamente di cangiar nel medesimo tempo i segni nei due membri dell' ultimo resultato, allorchè l' incognita sarà affetta dal segno* $-$.

58. Prima d' intraprendere, per mezzo delle lettere, la risoluzione generale del Problema del num.° 56, esaminerò ancora un caso particolare. Suppongo che la prima somma ricevuta dall' Operaio sia di 46 lire, e la seconda di 30 lire, le altre circostanze restando d' altronde le stesse; l' equazioni del problema saranno

$$12x+7y=46,$$
$$8x+5y=30.$$

La prima dà

$$y=\frac{46-12x}{7};$$

moltiplicando questo valore per 5, onde metterne il resultato in luogo di $5y$ nella seconda, avremo

$$8x+\frac{230-60x}{7}=30;$$

facendo sparire i denominatori, otterremo

$$56x+230-60x=210,$$

ovvero $\quad 56x-60x=210-230,$

oppure $\quad -4x=-20;$

e cangiando i segni dei due membri, secondo l' osservazione del num.° precedente, troveremo finalmente,

$$4x=20,$$

$$x=\frac{20}{4}=5.$$

Se si sostintisce nell' espressione di y in luogo di x il suo valore 5, verrà

$$y=\frac{46-60}{7};$$

e riducendo il numeratore del valore di y, avremo

$$y=\frac{-14}{7}.$$

Ma come dobbiamo noi interpretare adesso il segno —, dal quale è affetta la quantità isolata —14? Si concepisce bene ciò, che vuol dire l'insieme di due quantità separate dal segno — allorchè la quantità da sottrarre è minore di quella, dalla quale si deve sottrarre; ma da qual cosa possiamo noi togliere una quantità, la quale non è unita ad alcun' altra nel membro, dov' essa si trova? Per ischiarir questa specie di paradosso, il miglior mezzo che affacciasi; è quello di risalire alle stesse equazioni, ch' esprimono le condizioni del problema, poichè stando più presso al suo enunciato, comprenderemo meglio le circostanze, che han dato luogo alla presente difficoltà.

Riprendo dunque l' equazione

$$12x+7y=46;$$

pongo in luogo di x il suo valore 5, e viene

$$60+7y=46.$$

La sola ispezione di quest' equazione ci fa conoscere un' assurdità. Infatti non è possibile formare il numero 46 aggiungendo qualche cosa al numero 60, che solo già sorpassa 46.

Prendo pure la seconda equazione

$$8x+5y=30,$$

e ponendovi 5 in luogo di x, trovo

$$40+5y=30;$$

la medesima assurdità, che abbiamo ora trovata, poichè bisognerebbe che il numero 30 potesse formarsi aggiungendo qualche cosa al numero 40.

Ora le quantità $12x$, ovvero 60 nelle prima equazione, $8x$, ovvero 40 nella seconda, esprimono ciò, che guadagna l' Operaio col solo suo lavoro; le quantità $7y$, e $5y$ rappresentano i guadagni attribuiti alla sua moglie insieme col

figlio, mentre che i numeri 46, e 30 rappresentano la somma data pel salario cumulato di queste tre persone: dobbiam veder bene adesso in che cosa consiste l'assurdità.

A seconda dell'enunciato l'Operaio guadagnerebbe più da se solo di quel che non faccia aiutato dalla moglie, e dal figlio; è dunque impossibile di considerare il danaro attribuito al lavoro della moglie, e del figlio come un aumento al salario di quest' Operaio.

Ma se, invece di prendere il denaro attribuito alla moglie, ed al figlio come un guadagno, noi lo riguardiamo come una spesa fatta per essi a carico dell'Operaio, allora bisognerebbe togliere questo denaro da quello, che il marito avrebbe guadagnato egli solo, e non vi sarebbe più contradizione nessuna nelle equazioni, poichè diverrebbero

$$60-7y=46,$$
$$40-5y=30.$$

Si ricaverebbe tanto dall'una come dall'altra;

$$y=2;$$

e si concluderebbe da ciò che l'Operaio guadagna 5 lire per giorno, e che la sua moglie col suo figlio gli cagionano una spesa di due lire per giorno; il che possiamo d'altronde verificare nel modo seguente.

Per 12 giorni di lavoro l'Operaio guadagna

$$5^{l.}\times 12, \text{ ovvero } 60^{l.};$$

la spesa della moglie col figlio per 7 giorni è di

$$2^{l.}\times 7, \text{ ovvero } 14^{l.};$$

restano dunque all'Operaio 46 lire.

Per 8 giorni di lavoro l'Operaio guadagna

$$5^{l.}\times 8, \text{ ovvero } 40^{l.};$$

la spesa della moglie col figlio per 5 giorni è di

$$2^{l.}\times 5; \text{ ovvero } 10^{l.}$$

restan dunque all'Operaio 30 lire.

È adesso ben chiaro che all'enunciato del num.° 56 bisogna, perchè il Problema proposto sia possibile coi dati precedenti, sostituire il seguente.

Un Operaio lavorando presso un particolare per 12 giorni, avendo avuto seco lui nei primi 7 giorni sua moglie, e suo figlio, che gli cagionavano una spesa, ha ricevuto 46 lire; ha lavorato in seguito altri 8 giorni, per 5 de' quali aveva con lui sua moglie, e suo figlio, i quali gli cagionavano ancora la medesima spesa, ed ha ricevuto 30 lire. Si domanda quanto guadagnava per giorno, e quanto spendeva nel medesimo tempo per sua moglie e suo figlio.

Chiamando x il guadaguo giornaliero dell'Operaio, e y la

spesa per sua moglie con suo figlio, durante il medesimo tempo, l' equazioni del Problema saranno evidentemente

$$12x - 7y = 46,$$
$$8x - 5y = 30,$$

le quali, essendo risolute come quelle del num.° 56, daranno $x = 5^{l.}$, $y = 2^{l.}$

59. In tutti i casi, ove troveremo pel valore dell' incognita un numero affetto dal segno —, potremo rettificar l'enunciato del Problema in una maniera analoga alla precedente, esaminando con accuratezza qual sia la quantità, che d' additiva che ell' era nel primo enunciato, deve divenir sottrattiva nel secondo: ma l' Algebra dispensa da qualunque ricerca a questo riguardo allorchè sappiamo operare convenevolmente sopra l' espressioni affette dal segno —; imperocchè queste espressioni essendo dedotte dall' equazioni del Problema, debbono *sodisfare* a queste equazioni; c vale a dire, che sottoponendole alle operazioni indicate nell' equazioni, dobbiam trovare pel primo membro un valore eguale a quello del secondo. Così, l' espressione $\frac{-14}{7}$, ricavata dalle equazioni

$$12x + 7y = 46,$$
$$8x + 5y = 30,$$

deve, unitamente al valore $x = 5$, dedotto dalle equazioni medesime, verificarle ambedue.

La sostituzione del valore di x dà primieramente

$$60 + 7y = 46,$$
$$40 + 5y = 30.$$

Resta da fare la sottrazione di $\frac{-24}{7}$ in luogo di y; e per questo fa di mestieri moltiplicare quest' espressione per 7, e per 5, avendo riguardo al segno —, da cui la medesima è affetta.

Se si applica la regola de' segni, data nel numero 42 per a divisione, avremo

$$\frac{-14}{7} = -2;$$

poi, per la regola de' segni relativa alla moltiplicazione, otterremo

$$7 \times -2 = -14,$$
$$5 \times -2 = -10.$$

Le equazioni

$$60+7y=46\text{, e }40+5y=30,$$

divenendo respettivamente

$$60-14=46\text{, e }40-10=30,$$

saranno verificate, non per altro sommando le due parti del primo membro, ma togliendone la seconda dalla prima, come abbiam fatto qui sopra, dietro alla considerazione della forma di queste equazioni.

60. I dati del Problema del num.° 58. non hanno permesso di risolverlo nel senso del primo enunciato, e vale a dire per addizione, ossia riguardando come un guadagno il denaro attribuito alla presenza della moglie, e del figlio dell' Operaio; il secondo enunciato non converrebbe niente di più ai dati del Problema del num.° 56.

Se, in questo caso, si volesse considerare y com' esprimente una spesa, l' equazioni

$$12x-7y=74;$$
$$8x-5y=50,$$

che si avrebbero allora, darebbero

$$x=5\text{, e }y=\frac{-14}{7};$$

e la sostituzione del valore di x cangerebbe primieramente queste equazioni in

$$60-7y=74,$$
$$40-5y=50.$$

L' assurdità di questi resultati è precisamente contraria a quella dei resultati del num.° 58, poichè si tratta adesso d' arrivare a de' resti maggiori dei numeri 60; e 40, dai quali si tolgono le quantità $7y$, e $5y$.

Non solamente il segno $-$, dal quale è affetta l' espressione di y, indica un' assurdità, ma la rettifica ancora; poichè, seguendo la regola dei segni,

$$\frac{-14}{7}=-2;$$
$$-7\times-2=+14;$$
$$-5\times-2=+10.$$

Per questo mezzo l' equazioni

$$60-7y=74\text{ , }40-5y=50$$

divenendo

$$60+14=74\text{ , }40+10=50,$$

si verificano per addizione; ed in conseguenza le quantità $-7y$, e $-5y$, trasformate in $+14$, $+10$, in vece di esprimere delle spese a carico dell'Operaio, son riguardate come un guadagno pel medesimo: si ricade dunque, anco in questo caso, sopra il vero enunciato del Problema.

61. S'apprende dagli esempî precedenti che *si posson trovare negli enunciati de' Problemi del primo grado certe contradizioni, che l'Algebra fa non solamente conoscere, ma di cui indica ancora la rettificazione, rendendo sottrattive certe quantità, che s'erano riguardate come additive, ovvero additive certe quantità, che si erano riguardate come sottrattive, oppure dando per le incognite dei valori affetti dal segno* —

Ecco ciò che bisogna intendere allorchè diciamo comunemente che i valori affetti dal segno —, e che si chiamano *soluzioni negative*, risolvono in un senso opposto al suo enunciato il pròblema, ove esse s'incontrano.

Segue da ciò che, a parlar propriamente, possiam riguardare come non formanti che un sol Problema quelli, i cui enunciati son collegati tra loro in modo che le soluzioni, le quali sodisfanno ad uno de' suoi enunciati, posson, per mezzo d'un semplice cangiamento di segno, soddisfare anco all'altro.

62. Poichè le quantità negative risolvono, in un certo senso i Problemi, ai quali danno origine, è a proposito di esaminare più da vicino l'uso di queste quantità, e primieramente d'assicurarsi della maniera, colla quale conviene effettuare le operazioni su esse indicate.

Abbiamo di sopra fatt'uso delle regole de' segni precedentemente trovate per ciascuna dell'operazioni fondamentali; ma queste regole non sono state punto dimostrate sopra quantità isolate. Per la sottrazione, a causa d'esempio, abbiamo supposto che bisognava toglier da a l'espressione $b-c$, nella quale la quantità negativa $-c$ era preceduta da una quantità positiva b (20). Si ridurrebbe anche $b-c$ a $-c$, facendo $b=0$; il che cangerebbe il resultato in $a+c$: ma il ragionamento fatto nel luogo citato sopponendo l'esistenza della quantità b, non sembra che comprenda questo caso; e siccome la teoria delle quantità negative è ad un tempo stesso una delle più importanti, e delle più spinose dell'Algebra, torna a proposito d'appoggiarla sopra salde basi. Per arrivare a tal fine, bisogna risalire all'origine delle quantità negative.

La maggior sottrazione, che si possa eseguire sopra una quantità, è quella di toglierla dalla quantità, medesima; ed in questo caso abbiamo zero per resto, così $a-a=0$. Ma allorchè la quantità da togliersi sorpassa quella, dalla quale bisogna toglierla, non si può più effettuare interamente la sot-

trazione; altro non si fa che eseguire nella quantità da sottrarsi una diminuzione eguale alla quantità, dalla quale essa dovrebbe esser sottratta. Allorchè da 3, per esempio, bisogna togliere 5, ovvero allorchè si ha la quantità $3-5$, togliendo primieramente 3 da 5, si decompone il 5 in due parti 3 e 2, la cui sottrazione successiva ridurrebbesi a quella di 5, e perciò in luogo di $3-5$ si ha l'espressione equivalente $3-3-2$, la quale riducesi a -2. Il segno $-$, che precede il 2, dimostra che vi è bisogno di questa quantità affinchè la sottrazione possa interamente effettuarsi; di maniera che se si fosse aggiunto 2 alla prima delle quantità, si sarebbe ottenuto $3+2-5$, ovvero zero. Si esprime dunque, per mezzo dei segni algebrici, l'idea, che dobbiamo annettere alla quantità negativa $-a$ formando l'equazione $a-a=o$, ovvero riguardando i simboli $a-a$, $b-b$, ec. come equivalenti a zero.

Ciò posto, si concepisce che, se si unisca alla quantità qualunque a il simbolo $b-b$, che in sostanza non è che zero, non si cangerà punto il valore di questa quantità, e che in conseguenza l'espressione $a+b-b$ non è che un' altra maniera di scrivere la quantità a; il che è d' altronde evidente; poichè i termini $+b$ e $-b$ si distruggono.

Ma avendo, per questo cangiamento di forma, fatto entrare nella composizione di a le quantità $+b$, e $-b$, si fa chiaro che, per sottrarre una qualunque di queste quantità, serve lo scancellarla. Se sarà $+b$, che si voglia sottrarre da a, la cancelleremo, e resterà $a-b$; il che si accorda colla convenzione stabilita nel n.° 2: se, al contrario, si vuol sottrarre $-b$, caucelleremo quest'ultima quantità, e resterà $a+b$ come si concluderebbe dal n.° 20.

A riguardo della moltiplicazione, si osserverà che il prodotto di $a-a$ per $+b$ dev' essere $ab-ab$, perchè il moltiplicando essendo eguale a zero, il prodotto deve pure essere zero; ed il primo termine essendo $+ab$, il secondo deve necessariamente essere $-ab$, affin di distruggere questo primo..

Conchiuderemo da ciò che $-a$ moltiplicato per $+b$ dee dare $-ab$.

E moltiplicando a per $b-b$, avremo pure $ab-ab$, perchè il moltiplicatore essendo eguale a zero, il prodotto sarà parimente eguale a zero, e bisognerà in conseguenza che il secondo termine sia $-ab$ per distruggere il primo $+ab$.

Dunque $+a$ moltiplicato per $-b$ dee dare $-ab$.

In ultimo, se si moltiplica $-a$ per $b-b$, il primo termine del prodotto essendo, secondo ciò che precede, $-ab$, bisognerà che il secondo termine sia $+ab$, poichè il prodotto dev' esser nullo nel medesimo tempo che il moltiplicatore.

Dunque $-a$ moltiplicato per $-b$ deve dare $+ab$.

Ravvicinando questi resultati, se ne deducono le medesime regole che quelle del num. 31.

Il segno d'un quozieute, combinato con quello del divisore, secondo le regole proprie alla moltiplicazione, dovendo riprodurre il segno del dividendo, si concluderà dal già detto, che la regola de' segni, data nel n.° 42, conviene ancora al caso presente, e che per conseguenza *le quantità manomie, allorchè sono isolate, si combinano, per rapporto ai loro segni, come quando fanno parte dei polinomi.*

63. Dietro a queste osservazioni potremo sempre, allorchè incontreremo de' valori negativi, risalire al vero enunciato del problema risoluto, col cercare in qual maniera questi valori sodisfanno all'equazioni del problema proposto; questo è ciò, che verrà confermato dall'esempio seguente, il qual si porta a de' numeri di specie differente da quelli considerati nel n.° 56.

64. *Due corrieri, per andare all'incontro l'uno dell'altro, partono nel medesimo tempo da due Città, la cui distanza è data; si sa quante miglia percorre ciascun de' corrieri in un'ora, e si domanda, a qual punto della strada, che unisce le due Città, questi corrieri s'incontreranno.*

A fine di rendere più evidenti le circostanze del problema, ho posto qui basso una Figura, nella quale i punti indicati dalle lettere maiuscole A, e B rappresentano i luoghi di partenza dei due corrieri.

A R B

Esprimerò secondo il solito con lettere minuscole i dati, e le incognite del problema:

a la distanza dei punti di partenza A, e B;

b il numero delle miglia, che percorre in un'ora il corriere partito dal punto A;

c il numero delle miglia, che percorre nello stesso tempo il corriere partito dal punto B.

La lettera R essendo posta nel punto d'incontro de' due corrieri, chiamerò

x lo spazio AR percorso dal primo,

y lo spazio BR percorso dal secondo;

e siccome

$$AR+BR=AB;$$

avrò l'equazione

$$x+y=a.$$

Considerando in seguito che gli spazî x, ed y son percorsi

nel medesimo tempo, osservaremo che il primo corriere, il quale fa un numero b di miglia in un' ora di tempo, percorrerà lo spazio x in un tempo espresso da $\frac{x}{b}$.

Parimente il secondo corriere, che percorre un numero c di miglia in un' ora, percorrerà lo spazio y in un tempo espresso da $\frac{y}{c}$: avremo dunque

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

L'equazioni del problema saranno per conseguenza

$$x+y=a,$$
$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}$$

E facendo sparire il denominatore b dalla seconda, avremo

$$x=\frac{by}{c};$$

ponendo questo valore di x nella prima equazione, essa diventerà

$$\frac{by}{c}+y=a,$$

e ne concluderemo

$$by+cy=ac, \text{ donde } y=\frac{ac}{b+c}.$$

Rimettendo il valore di y in quello di x, otterremo

$$x=\frac{b}{c}\times\frac{ac}{b+c}, \text{ ovvero } x=\frac{abc}{c(b+c)} \ (53)$$

oppur finalmente

$$x=\frac{ab}{b+c}(38).$$

Poichè non entra alcun segno $-$ nei valori di x, ed y, è evidente che per tutti i numeri, che si prendono per le lettere a, b, c, si troveranno sempre per x, e per y due numeri affetti dal segno $+$, e che in conseguenza il problema

proposto sarà sempre risoluto nel senso preciso del suo enunciato. Infatti si concepisce facilmente che in tutti i casi, ove due corrieri vanno nel tempo stesso l'uno contro dell'altro, essi debbono necessariamente incontrarsi.

65. Suppongo adesso che i due corrieri vadano nel medesimo senso; il corriere, cioè, che parte dal punto A, corra dietro a quello, che parte dal punto B, il quale corre verso un punto C, posto al di là del punto B per rapporto al punto A.

A B R C

È evidente, che in questa ipotesi, il corriere partito dal punto A non può incontrare il corriere partito dal punto B, s'egli non va con maggiore celerità di quest' ultimo; ed il punto d'incontro R non è più tra A, e B, ma al di là di B per rapporto ad A.

Conservando i medesimi dati che qui sopra, ed avvertendo che allora

$$AR - BR = AB,$$

s'avrà

$$x - y = a.$$

La seconda equazione

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$$

non esprimendo che l'eguaglianza dei tempi impiegati dai corrieri nel percorrere gli spazi AR, e BR, non cangia punto.

Le due equazioni qui sopra, essendo risolute come le precedenti, danno

$$x = \frac{by}{c},$$

$$\frac{by}{c} - y = a, \quad by - cy = ac,$$

$$y = \frac{ac}{b-c},$$

$$x = \frac{b}{c} \times \frac{ac}{b-c} = \frac{abc}{c(b-c)}$$

e finalmente

$$x = \frac{ab}{b-c}.$$

Qui i valori di x, e di y non saran positivi eccetto che quando prenderemo b maggiore di c, e vale a dire, quando supporremo che il corriere partitosi dal punto A vada con celerità maggiore dell' altro.

Se, per esempio, facciamo

$$b=10, \quad c=5,$$

si ha

$$x=\frac{10a}{10-5}=\frac{10a}{5}=2a,$$

$$y=\frac{5a}{10-5}=\frac{5a}{5}=a;$$

dal che resulta che il punto d' incontro R è lontano dal punto A di due volte AB.

Se in seguito supponiamo b minore di c; che si faccia, per esempio,

$$b=5, \quad c=10,$$

trovasi

$$x=\frac{5a}{5-10}=\frac{5a}{-5}=-a,$$

$$y=\frac{10a}{5-10}=\frac{10a}{-5}=-2a.$$

Questi valori essendo affetti dal segno $-$, fanno vedere che il problema non può più essere risoluto nel senso del suo enunciato: ed infatti è assurdo il supporre, che il corriere partito dal punto A, non percorrendo che cinque miglia per ora, possa mai arrivare il corriere partito dal punto B, il quale percorre 10 miglia parimente per ora, e ch' è avanti al primo.

66. Frattanto questi medesimi valori risolvono il problema in un certo senso; poichè sostituendoli nell' equazioni

$$x-y=a,$$

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c},$$

abbiamo per le regole de' segni

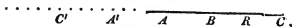
$$-a+2a=a,$$

$$-\frac{a}{5}=-\frac{2a}{10};$$

Queste due equazioni son sodisfatte, poichè effettuando le riduzioni, che si presentano, il primo membro diviene eguale al secondo: e se facciamo attenzione ai segni de' termini, che compongono la prima, vedremo come bisogni modificare l'enunciato del problema per toglierne l'assurdità.

Difatto è lo spazio a corrispondente a x, e percorso dal primo corriere, che veramente vien sottratto dallo spazio $2a$ corrispondente a y, e percorso dal secondo corriere; ciò è dunque come se si fosse cangiato y in x, e x in y, e si fosse supposto che il corriere partitosi dal punto B andasse dietro dell' altro.

Questo cangiamento nell' enunciato ne produce uno nella direzione del corso de' due corrieri; essi non corrono altrimenti verso il punto C, ma dal lato opposto verso il punto C', come lo mostra la seguente figura

. . . . C' A' A B R C,

ed il loro incontro si fa in R'. Resulta da ciò

$$BR'-AR'=AB,$$

il che dà

$$y-x=a;$$

d' altronde abbiamo sempre

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c},$$

e si troverebbe

$$x=\frac{ab}{a-b}=\frac{5a}{10-5}=a,$$

$$y=\frac{ac}{c-b}=\frac{10a}{10-5}=2a:$$

valori positivi, i quali risolvono il problema nel preciso senso del suo enunciato.

67. Questo problema presenta un caso, nel quale egli è affatto assurdo. Siffatto caso ha luogo allorchè si suppone che i due corrieri si movano colla stessa velocità; è visibile che da qualunque lato si facciano correre, essi non possono mai incontrarsi; poichè conservan sempre tra loro la stessa distanza dei loro punti di partenza. Quest' assurdità, che nessuna modificazione nell' enunciato può far disparire, si manifesta evidentemente nelle equazioni.

Abbiamo allora $b=c$, poichè i corrieri, andando colla stessa celerità percorrono il medesimo spazio in un'ora; l'equazione

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}$$

diviene

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b},$$

e dà

$$x=y.$$

Perciò l'equazione $x-y=a$ si cangia in

$$x-x=a\text{ , ovvero }o=a;$$

resultato apertamente assurdo, poichè suppone nulla una quantità a, la cui grandezza è data.

68. Questa assurdità si manifesta in una maniera assai singolare nei valori delle incognite

$$x=\frac{ab}{b-c},\quad y\frac{ac}{b-c};$$

il loro denominatore $b-c$ divenendo zero allorchè $b=c$, abbiamo

$$x=\frac{ab}{o},\quad y=\frac{ac}{o}.$$

Non s'intende facilmente qual possa essere il quoziente d'una divisione quando il divisore è zero; si vede solo che, se si prendesse b pochissimo differente da c, i valori di x, e y diverrebbero grandissimi. Per convincersene, non dobbiamo far altro che prendere

$$b=6^{m.},\qquad c=5^{m.},8,$$

ed avremo

$$x=\frac{6a}{o,2}=3oa,$$

$$y=\frac{5,8a}{o,2}=29a:$$

si passi in seguito a

$$b=6\,,\qquad c=5,9\,;$$

ed avremo

$$x=\frac{6a}{0,1}=60a\,,$$

$$y=\frac{5,9a}{0,1}=59a:$$

facciasi ancora

$$b=6\,,\qquad c=5,99\,,$$

e verrà

$$x=\frac{6a}{0,01}=600a\,,$$

$$y=\frac{5,99a}{0,01}=599a\,;$$

e si vede facilmente che il divisore diminuendo a misura che si rende più piccola la differenza dei numeri b, e c, si ottengono de' valori di più in più maggiori.

Frattanto, siccome, per quanto piccola che sia una quantità, essa non può esser giammai considerata come zero, ne segue che, per quanto si suppongano poco differenti tra loro i numeri rappresentati da b, e c, e in conseguenza, per quanto grandi si fossero i valori resultanti di x, e y, non mai s' arriverrebbe a quelli che corrispondono al caso di $b=c$.

Questi ultimi non potendo essere rappresentati da nessun numero, per quanto si supponga grandissimo, son detti *infiniti*; e qualunque espressione della forma $\frac{m}{0}$, il cui denominatore è zero, è riguardata come il simbolo dell' *infinito*.

Questo esempio dimostra che l'*infinito* matematico è un'idea negativa, poichè non vi s' arriva che posta l'impossibilità d'assegnare una quantità, comunque grande, che risolver possa il problema.

Potrebbesi dimandar qui come i valori

$$x=\frac{ab}{0}\,,\quad y=\frac{ac}{0}\,,$$

sodisfacciano alle equazioni proposte; perchè è una proprietà essenziale dell' Algebra che i simboli dei valori dell'incognite, qualunque essi sieno essendo sottomessi alle operazioni indi-

cate sopra le medesime incognite, sodisfacciano alle equazioni del problema

Sostituendoli nell'equazioni.

$$x - y = a$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b},$$

che si referiscono al caso ove $b = c$, abbiamo, per la prima,

$$\frac{ab}{o} - \frac{ab}{o} = a,$$

ovvero $\frac{ab - ab}{o} = a$, oppure $ab - ab = a \times o$,

o finalmente

$$o = o;\ \text{poichè}\ a \times o = o.$$

La seconda, equazione somministra, nella medesima circostanza,

$$\frac{ab}{o \times b} = \frac{ab}{o \times b};$$

i due membri di ciascuna equazione divenendo eguali, queste equazioni son sodisfatte.

Resta ancor da spiegare come la nozione indicata dall'espressione $\frac{ab}{o}$ corregga l'assurdità del resultato trovatosi nel n.° 67.

A tal'effetto divideremo per x i due membri dell'equazione

$$x - y = a;$$

avremo

$$1 - \frac{y}{x} = \frac{a}{x};$$

e siccome l'equazione

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b}$$

dà $x = y$, la prima diverrà

$$1 - 1 = \frac{a}{x},\ \text{ovvero}\ o = \frac{a}{x}.$$

L' errore consiste qui nella quantità $\frac{a}{x}$, perchè questo secondo membro dell' equazione sorpassa il primo; ma tal' errore diverrà sempreppiù minore a misura che prenderemo per x un maggior numero. Ecco dunque, e con tutta ragione, che l' Algebra dà per x un' espressione, che alcun numero, per quanto grande egli sia, non potrebbe rappresentarlo, ma che venendo alla serie di quelli, i quali rappresentan de' numeri di più in più grandi, indica in qual senso si può rendere di più in più piccolo l' errore della fatta supposizione

69. Se i corrieri andassero colla stessa celerità, e nel medesimo senso, partendosi dal medesimo punto, il loro incontro non si farebbe altrimenti in un punto particolare, poichè questo avrebbe luogo in tutta l' estensione del loro corso: è bene il vedere come tal circostanza sia rappresentata dai valori, che prendono in questo caso le incognite x, e y.

B

A C

Il punto A, ed il punto B coincidendo in un solo abbiamo, per questo caso, $a=o$, e sempre $b=c$; laonde ne vien

$$x=\frac{o \cdot b}{o}=\frac{o}{o},\ y=\frac{o \cdot c}{o}=\frac{o}{o}.$$

Per interpretare questi valori, i quali indicano una divisione, in cui il dividendo, ed il divisore son nulli ambedue, risalgo alle equazioni solite del problema. La prima divenendo

$$x-y=o,\ \text{dà}\ x=y;$$

e sostituendo questo valore nella seconda equazione, ch' è allora

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b},\ \text{deriva}\ \frac{y}{b}=\frac{y}{b}.$$

L' ultima equazione avendo i suoi due membri *identici*, e vale a dire, composti de' medesimi termini, presi col medesimo segno, è sodisfatta qualunque sia il valore, che diasi ad y, e non è sufficiente a determinar quest' incognita. D' altronde è chiaro che l' equazione

$$\frac{y}{b}=\frac{y}{b},\ \text{riducesi a}\ x=y,$$

e non esprime, per conseguenza, nulla di più della prima (*). Resulta solamente dall'una, e dall'altra, che i due corrieri saran sempre insieme, poichè le distanze x, e y hanno ambedue principio nello stesso punto A, e son eguali, i loro valori restando d'altronde indeterminati. L'espressione $\frac{0}{0}$ è qui dunque il simbolo d'una quantità indeterminata: dico qui, poichè vi sono de' casi dove ciò non succede; ma allora le espressioni proposte non hanno la stessa origine della precedente.

70. Per darne un esempio, sia

$$\frac{a(a^2-b^2)}{b(a-b)}$$

Questa quantità diviene $\frac{0}{0}$ nella sua forma attuale allorchè facciamo $a=b$; ma se prima riducasi alla sua più semplice espressione sopprimendo il fattore $a-b$ comune al numeratore, e al denominatore, si trova

$$\frac{a(a+b)}{b}$$

che dà $2a$ nel caso di $a=b$.

Non accade lo stesso de' valori di x, e di y trovati nel num. antecedente; poichè essi non sono suscettibili d'esser ridotti ad una espressione più semplice.

Segue da ciò, che abbiam detto, che quando s' incontra un'espressione, la quale diviene $\frac{0}{0}$, bisogna, avanti di decidere del suo valore, cercare se il numeratore, e denominatore hanno qualche fattore comune, il quale, diventando nullo, renda questi due termini eguali a zero nel medesimo tempo, e sopprimendolo, otterremo il vero valore dell'espressione proposta. Vi sono peraltro de' casi, che potrebbero ancora sfuggire a siffatto metodo; ma i limiti di questa Opera non mi permetton altro che di por sott'occhio il *fatto analitico*. Nel *Trattato del calcolo differenziale* si danno i meto-

(*) *Per abbreviare il discorso, gli Analisti applicano alle equazioni medesime l'epiteto d'* identiche;

$\frac{y}{b} = \frac{y}{b}$ *è un'equazione identica*, $5-3x=5-3x$ *n'è un'altra, e quando due equazioni non esprimono che la stessa cosa, si dice pure che queste due equazioni son identiche.*

di generali per trovar il vero valore delle quantità, le quali diventano $\frac{0}{0}$ (*).

71. Ciò, che precede, fa veder chiaramente che *le soluzioni algebriche o sodisfanno completamente all' enunciato del problema, quand' è possibile, o indicano una modificazione da farsi nell' enunciato allorchè i dati presentano delle contradizioni, le quali posson essere tolte, o finalmente fanno conoscere un' impossibilità assoluta, allorchè non v' è alcun mezzo di risolvere coi medesimi dati un Problema analogo, in un certo senso, a quello proposto.*

72. Bisogna osservare nella soluzion dei differenti casi del problema precedente che il cangiamento di segno delle incognite x, ed y corrisponde ad un cangiamento nella direzion degli spazî, che queste incognite rappresentano. Quando l' incognita y era contata da B verso A, essa aveva nell'equazione

$$x+y=a$$

il segno $+$, ed ha preso il segno$-$nel secondo caso allorchè si è portata del lato opposto; ossia da B verso C, n. 65; poichè abbiamo avuto per prima equazione

$$x-y=a.$$

Effettuando questo cangiamento di segno nella seconda equazione

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c},$$

si troverebbe

$$\frac{x}{b}=\frac{-y}{c}$$

resultato, che non è quello, che abbiamo dato nel citato num.°; ma fa di mestieri riflettere che lo spazio y si compone di multipli dello spazio c, che percorre in un' ora il corriere partito dal punto B, e questo spazio essendo diretto nel medesimo senso dello spazio y, debb' esser supposto del medesimo segno, e prendere per conseguenza il segno $-$ allorchè l' abbiamo dato a y: fatta quest' osservazione, avremo

$$\frac{x}{b}=\frac{-y}{-c}\text{, ovvero }\frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

(*) *Vedasi il* Trattato del Calcolo differenziale, *e del* Calcolo integrale *Tomo* 1., *ovvero il* Trattato elementare *sopra lo stesso soggetto.*

Serve dunque un semplice cangiamento di segno per comprendere il secondo caso del problema nel primo. Ed è per questa ragione che l' Algebra somministra ad un tempo la soluzione di più problemi analoghi

Il problema del n. 15 n' offre un esempio molto evidente. Abbiam supposto in quell' articolo che il padre dovesse al figlio una somma d; se si volesse risolvere il problema nell' ipotesi opposta, e vale a dire, supponendo che il figlio debba a suo padre la somma d, servirà cangiare il segno di d nel valore di x, e si avrà

$$x = \frac{bc - d}{a + b}:$$

finalmente, se si suppongono eguali i crediti dell' uno verso dell' altro bisognerà far $d = 0$, e verrà

$$x = \frac{bc}{a+b}.$$

Nulla è più facile che verificar queste due soluzioni ponendo di nuovo il problema in equazione per ciascuno dei casi, che abbiamo ora enunciati.

73. A solo oggetto di conservare l' analogia tra i problemi dei num. 56. e 64. ho impiegate due incognite nel secondo. Si potevan risolvere l' uno e l' altro con un' incognita sola: imperciocchè quando si dice che l' operaio ha ricevuto 74 lire per 12 giorni del suo lavoro, e 7 di quello della sua moglie e suo figlio, ne resulta che, se si chiama y il guadagno della moglie e del figlio, e dalle 74 lire si tolgano $7y$, resta $74 - 7y$ per dodici giornate dell' operaio; dal che ne segue ch' esso

guadagna $\frac{74 - 7y}{12}$ per giorno.

Calcolando nella stessa maniera il di lui guadagno nella seconda supposizione, troveremo ch' ei

guadagna $\frac{50 - 5y}{8}$ per giorno.

Ed eguagliando queste due quantità, formeremo l' equazione.

$$\frac{74 - 7y}{12} = \frac{50 - 5y}{8}.$$

Parimente nel problema del n.° 64.

A R B

se x denota lo spazio AR percorso dal corriere partito dal punto A, $BR = a - x$ sarà quello del corriere partito dal punto B andando verso A; questi due spazî essendo percorsi nel tempo medesimo dai corrieri, che percorrono respettivamente i numeri b, e c di miglia per ora, s' avrà

$$\frac{x}{b} = \frac{a - x}{c},$$

d' onde

$$cx = ab - bx;$$

$$x = \frac{ab}{b+c}.$$

La differenza tra le soluzioni, che ora abbiam date, e quelle dei num. 56. e 64. non consiste che in questo, cioè, che abbiamo formata, e risoluta la prima equazione col soccorso del linguaggio ordinario, senza impiegarvi la scrittura algebrica; ed è evidente che quanto più spingeremo avanti l' uso del primo metodo, meno resterà da farsi col secondo.

74. Si aggiunge qualche volta al problema del n. 64. una circostanza, la quale però nol rende già più difficile.

$A \qquad R \qquad C \qquad B$

Si supponga che il corriere partito dal punto B si sia posto in viaggio un numero d *di ore avanti di quello, che parte dal punto A.*

È chiaro che ciò si riduce a cangiare il punto di partenza del primo; poichè, s' egli percorre un numero c di miglia per ora, percorrerà uno spazio $BC = cd$ in d ore; e si troverà nel punto C allorchè l' altro corriere partirà dal punto A; di modo che l' intervallo tra i due punti di partenza sarà

$$AC = AB - BC = a - cd.$$

Scrivendo dunque $a - cd$ in luogo di a nell' equazione del n. precedente, s' avrà

$$\frac{x}{b} = \frac{a - cd - x}{c},$$

$$x = \frac{ab - bcd}{b+c}.$$

Se i corrieri andassero nel medesimo senso,

$A \qquad B \qquad C \qquad R$

l' intervallo tra i punti di partenza sarebbe

$$AC = AB + BC = a + cd\,;$$

lo spazio percorso dal corriere partito dal punto A sarebbe AR, laddovechè quello dell' altro corriere sarebbe

$$CR = AR - AC\,;$$

avrebbesi dunque

$$\frac{x}{b} = \frac{x-a-cd}{c}\,;$$

d' onde

$$x = \frac{ab+bcd}{b-c}\,.$$

75. Enunciato in questa maniera il problema offre un caso ove l' interpretazione del valor negativo trovato per x presenta qualche difficoltà; quest' allorquando, facendo andare i corrieri in senso contrario, si dà al numero d un valor tale che lo spazio BC rappresentato da cd divien maggiore di a, che rappresenta AB.

C R A B

Allora il corriere partito dal punto B si trova in C dall' altro lato del punto A nel momento che si fa partire quest' ultimo verso del punto B: v' è dunque assurdità nel supporre che i due corrieri possano in questo caso incontrarsi.

Se s' avesse, per esempio,

$a = 400^{m.}$, $b = 12^{m.}$, $c = 8^{m.}$, $d = 60^{or.}$,

ne resulterebbe $cd = 480^{m.}$; e così il punto C sarebbe a $80^{m.}$ al di là del punto A per rapporto al punto B; ma troverebbesi allora

$$x = \frac{400.\ 12 - 60.\ 8.\ 12}{8+12} = \frac{400.\ 3 - 60.\ 2.\ 12}{2+3}$$

$$= \frac{1200-1440}{5} = -\frac{240}{5} = -48.$$

Così l' incontro dei corrieri avrebbe luogo in un punto R, posto a $48^{m.}$ dall'altro lato del punto A, ma tra A, e C, benchè sembri che il corriere partito dal punto B dovendo continuare il suo corso al di là del punto C, non potrebbe esser incontrato dall' altro se non che oltrepassato quest'ultimo punto.

Per conoscere il problema risoluto in questo caso, bisogna sostituire in luogo di x il numero negativo $-m$ nell' equazione, che diviene

$$-\frac{m}{b}=\frac{a-cd+m}{c},$$

ovvero, cangiando il segno de' due membri,

$$\frac{m}{b}=\frac{cd-a-m}{c}.$$

Si vede che lo spazio percorso dal corriere

C R A B

partito dal punto B è $cd-a-m$, ovvero ciò che resta di BC quando da esso si tolgono AB, e AR, vale a dire, CR, e che $AC=cd-a$: egli è dunque come se il secondo corriere avesse dovuto partire immediatamente dal punto C dove egli si trova quando parte il primo; ma poichè dessi vanno in sensi contrarî, il loro incontro deve necessariamente aver luogo nell' intervallo AC. Questo caso è compreso nel primo di quelli del n.° 74, ove basta cangiare $a-cd$ in $cd-a$, affine d'ottenere il valore, che avrebbe m dietro all' equazione qui sopra esposta. (*Vedasi la Nota alla fine del presente Volume*).

76. Il problema del n.° 56. essendo generalizzato, enunciasi come segue:

Un operaio avendo passato un numero a *di giorni in una casa, ed avendo seco lui la sua moglie e il suo figlio per un numero* b *di giorni, ha ricevuto una somma* c; *ha il medesimo operaio passato in seguito nella stessa casa un numero* d *di giorni, ed ha avuto questa volta con lui sua moglie e suo figlio per un numero* e *di giorni, ed ha ricevuto una somma* f; *si domanda quanto egli guadagnava per giorno, quanto guadagnavano nel tempo stesso sua moglie insieme col suo figlio.*

Sien sempre x il prezzo della giornata dell' operaio, e y quello della giornata della sua moglie e suo figlio;
per un numero a di giorni, egli avrà ax;
per un numero b di giorni la sua moglie e suo figlio avranno by, laonde

$$ax+by=c;$$

per un numero d di giorni egli avrà dx,
per un numero e di giorni sua moglie e suo figlio avranno ey, onde

$$dx+ey=f:$$

ecco le due equazioni generali del problema.

Ricavasi dalla prima

$$x = \frac{c - by}{a},$$

moltiplicando questo valore per d, affin di sostituirlo in luogo di x nella seconda equazione, s'avrà

$$dx = \frac{cd - bdy}{a},$$

ed in conseguenza

$$\frac{cd - bdy}{a} + ey = f.$$

Facendo sparire i denominatori di quest'equazione, conseguiremo

$$cd - bdy + aey = af,$$

dalla quale concluderem successivamente

$$aey - bdy = af - cd,$$

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Conoscendo adesso y, se si pone il suo valore in quello di x, quest'ultimo sarà cognito; avremo

$$x = \frac{c - b\,\dfrac{af - cd}{ae - bd}}{a}.$$

Per simplificare quest'espressione, bisogna primieramente far la moltiplicazione indicata sulle quantità

$$b, \text{ ed } \frac{af - cd}{ae - bd}, \ (53)$$

il che dà

$$x = \frac{c - \dfrac{abf - bcd}{ae - bd}}{a};$$

poi ridurre c al denominatore della frazione, che l'accompagna, ed effettuare la sottrazione di questa frazione (51); e si ottiene

$$x=\frac{\frac{ace-bcd-abf+bcd}{ae-bd}}{a},$$

ovvero, riducendo,

$$x=\frac{\frac{ace-abf}{ae-bd}}{a} \ (^*).$$

(*) *Perchè non si abbia alcun dubbio sopra il senso di questa espressione, bisogna far attenzione alla linea, che si trova posta nello stesso rigo o verso della stampa. Così, nell'espressione* $x=\frac{A}{B}$, *A rappresenta il dividendo, sì intero che frazionario, e B il divisore nell'una e nell'altra ipotesi.*

Dietro a convenzione siffatta l'espressione $x=\frac{\frac{A}{C}}{B}$ *significa che x è uguale al quoziente della frazione* $\frac{A}{C}$ *diviso per B, e l'espressione* $x=\frac{A}{\frac{B}{C}}$ *indica per x il quoziente di A diviso per la frazione* $\frac{B}{C}$; *finalmente si ha per l'espressione* $x=\frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{D}}$ *il quoziente della frazione* $\frac{A}{C}$ *divisa per la frazione* $\frac{B}{D}$.

Effettuando la divisione per a (53), si troverà

$$x = \frac{ace - abf}{a^2c - abd};$$

e sopprimendo il fattore a comune al numeratore, e al denominatore (38), avremo in ultimo

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}.$$

I valori

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}, \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd},$$

s' applicano nella stessa maniera di quelli, che abbiamo trovati qui sopra, per l' equazioni letterali a una sola incognita: vi si sostituiscono in luogo delle lettere i numeri particolari all' esempio, che abbiamo prescelto.

Otterremo i resultati del n.° 56. facendo

$$a = 12, \quad b = 7, \quad c = 74;$$
$$d = 8, \quad e = 5, \quad f = 50,$$

e quelli del n.° 58 facendo

$$a = 12, \quad b = 7, \quad c = 46,$$
$$d = 8, \quad e = 5, \quad f = 30.$$

77. I valori di x, e y non convengono solamente al problema proposto; essi s' estendono a tutti quelli, che conducono a due equazioni del primo grado a due incognite: poichè è patente che queste equazioni son necessariamente contenute nelle formule

$$ax + by = c,$$
$$dx + ey = f,$$

purchè si intenda per le lettere a, b, d, ed e la collezione delle quantità date, che moltiplicano respettivamente le incognite x, e y, e per le lettere c, e f la collezione dei termini tutti cogniti, passati nel secondo membro.

Queste osservazioni fanno comprendere la necessità di porre le linee in modo ch' esse indichino i resultati, che ci proponiam d' indicare.

Della risoluzione di un numero qualunque di equazioni del primo grado, contenenti un egual numero di incognite.

78. Allorchè un problema contiene altrettante condizioni distinte quante sono le incognite in esso comprese, ciascuna di queste condizioni dà una equazione, nella quale succede spesso che le incognite son mescolate tra loro, come l'abbiam già veduto nei problemi a due incognite; ma, se queste incognite non sono che al primo grado, si può, come di già l'abbiam fatto nei numeri precedenti, *prendere in una delle equazioni il valore di una delle incognite, come se tutto il resto fosse cognito, e sostituire questo valore in tutte le altre equazioni, le quali, dopo di ciò, non conterranno che le altre incognite.*

Quest' operazione, per mezzo della quale si manda via una delle incognite, si chiama *eliminazione*. Con tal mezzo, se si hanno tre equazioni a tre incognite, ne dedurremo due equazioni a due incognite, le quali tratteremo come l'abbiam fatto di sopra; ed avendo ottenuti i valori delle due ultime incognite, gli sostituiremo nell' espressione della prima.

Se si hanno quattro equazioni a quattro incognite, ne dedurremo primieramente le tre equazioni a tre incognite, le quali tratteremo nel modo, che abbiamo detto; dipoi avendo trovati i valori delle tre incognite gli sostituiremo, nelle espressioni della prima, e così di seguito.

Ecco, per esempio, un problema, che contiene tre incognite, e tre equazioni.

79. *Sono stati comperati separatamente i carichi di tre vetture; il primo di questi, che conteneva* 30 *misure di segale,* 20 *d' orzo, e* 10 *di grano, è costato* 230 *lire;*

Il secondo, che conteneva 15 *misure di segale* 6 *d' orzo, e* 12 *di grano, è costato* 138 *lire;*

Il terzo, che conteneva 10 *misure di segale;* 5 *d'orzo, e* 4 *di grano, è costato* 75 *lire;*

Si domanda quanto costa la misura della segale, quella dell' orzo, e quella del grano?

Sia x il prezzo della misura della segale,
y quello della misura dell' orzo,
z quello della misura del grano.

Per sodisfare alla prima condizione, osserveremo che
30 misure di segale varranno $30x$,
20 misure d' orzo varranno $20y$,
10 misure di grano varranno $10z$,
ed il tutto dovendo ammontare a 230 lire, avremo l'equazione

$$30x+20y+10z=230.$$

Per la seconda condizione avremo

15	misure di segale, che varranno	$15x$,
6	d'orzo	$6y$,
12	di grano	$12z$,

e per conseguenza

$$15x + 6y + 12z = 138.$$

Per la terza condizione avremo

10	misure di segale, che varranno	$10x$,
5	d' orzo	$5y$,
4	di grano	$4z$,

e per conseguenza

$$10x + 5y + 4z = 75.$$

Il problema proposto sarà dunque ridotto alle tre equazioni

$$30x + 20y + 10z = 230,$$
$$15x + 6y + 12z = 138,$$
$$10x + 5y + 4z = 75.$$

Prima d' intraprendere la soluzione, esamino s'è possibile simplificarle, dividendo per un medesimo numero (12) i due membri di qualcheduna; e vedo che si posson dividere tutti i termini della prima per 10, e tutti quelli della seconda per 3; effettuando queste divisioni, non deggio occuparmi che delle equazioni

$$3x + 2y + z = 23,$$
$$5x + 2y + 4z = 46,$$
$$10x + 5y + 4z = 75.$$

Potendo scegliere una qualunque delle incognite per ricavarne il valore, prendo quello di z nella prima equazione, perchè quest' incognita non avendo coefficiente, il suo valore sarà una quantità senza divisore, ovvero intera; e viene

$$z = 23 - 3x - 2y.$$

Ponendo questo valore nella seconda, e terza equazione, si cangian esse in

$$5x + 2y + 92 - 12x - 8y = 46,$$
$$10x + 5y + 92 - 12x - 8y = 75;$$

e riducendo il primo lor membro, trovasi

$$92 - 7x - 6y = 46,$$
$$92 - 2x - 3y = 75.$$

Per operare sopra queste equazioni, le quali non contengono adesso che due incognite prendo nella prima il valore dell' incognita y; ed ottengo

$$y \frac{92-46-7x}{6}\text{, ovvero } y=\frac{46-7x}{6};$$

e per mezzo della sostituzione di questo valore, la seconda equazione diviene

$$92-2x-3\times\frac{46-7x}{6}=75;$$

Potrei, col metedo ordinario, mandar via il denominatore 6; ma osservo che questo denominatore essendo divisibile per 3, può simplificarsi effettuando sulla frazione $\frac{46-7x}{6}$ la moltiplicazione per 3, conformemente al n.° 54 dell' *Aritmetica*: con questo mezzo ho

$$92-2x-\frac{46-7x}{2}=75.$$

Facendo adesso sparire il denominatore 2, trovo

$$184-4x-46+7x=150;$$

essendo ridotto il primo membro, viene

$$138+3x=150.$$

d' onde concludesi

$$x=\frac{150-138}{3}=\frac{12}{3}\text{, ovvero } x=4$$

La sostituzione di questo valore nell' espressione di y dà

$$y=\frac{46-7\times4}{6}=\frac{46-28}{6}=\frac{18}{6}\text{, ovvero } y=3;$$

e per la sostituzione dei valori di x, e y nell' espressione di z, si ottiene

$$z=23-3\times4-2\times3=23-12-6\text{, ovvero } z=5.$$

Segue da ciò che la misura della segale costa 4 lire,
quella dell' orzo 3,
quella del grano 5,

Quest' esempio, nel medesimo tempo che offre l' applicazio-

ne del metodo del num.° precedente, debb' esser notato pei compendî di calcolo, che vi abbiamo praticati.

80. Prendo a risolvere ancora il problema seguente.

Un uomo, che si è incaricato di trasportare de' vasi di porcellana di tre grandezze, ha pattuito che ei pagherà tanto per ciascun vaso, che romperà, quanto riceverà per quelli, che consegnerà in buono stato.

Gli si consegnano primieramente due vasi piccoli, quattro medî, e nove grandi; rompe i medî, consegna tutti gli altri in buono stato, e riceve una somma di 28 lire.

Gli si danno dipoi sette vasi piccoli, tre medî, e cinque grandi; questa volta restituisce in buon grado i piccoli, e i medî, ma rompe i cinque grandi, e riceve solamente 3 lire.

Finalmente gli si consegnano nove vasi piccoli, dieci medî, ed undeci grandi; rompe tutti gli ultimi, e non riceve in conseguenza che 4 lire.

Si domanda quanto gli è stato pagato pel trasporto di un vaso di ciascuna grandezza.

Sia x il prezzo del trasporto di un vaso piccolo,
y quello del trasporto di un medio,
z quello del trasporto di un grande.

È manifesto che ciascuna somma, che riceve il portatore, è la differenza tra quella che gli si perviene pei vasi, che egli restituisce in buono stato, e quella, che deve per quelli, che ha rotti; dietro a questa osservazione, le tre condizioni del problema somministrano respettivamente le seguenti equazioni:

$$2x - 4y + 9z = 28,$$
$$7x + 3y - 5z = 3,$$
$$9x + 10y - 11z = 4.$$

La prima di queste equazioni dà

$$x = \frac{28 + 4y - 9z}{2};$$

e, per la sostituzione di questo valore, l'equazioni seconda, e terza diventeranno

$$\frac{196 + 28y - 63z}{2} + 3y - 5z = 3,$$

$$\frac{252 + 36y - 81z}{2} + 10y - 11z = 4.$$

Mandando via i denominatori, avremo

$$196 + 28y - 63z + 6y - 10z = 6,$$
$$252 + 36y - 81z + 20y - 22z = 8,$$

riducendo il primo membro, otterremo

$$196 + 34y - 73z = 6,$$
$$252 + 56y - 103z = 8;$$

prendendo il valore di y dalla prima di queste equazioni, s'avrà

$$y = \frac{73z - 190}{34}.$$

Per mezzo di questo valore, la seconda diviene

$$252 + 56 \times \frac{73z - 190}{34} - 103z = 8;$$

essendo liberata dal denominatore 34, essa si cangia in

$$34 \times 252 + 56 \times 37z - 56 \times 190 - 34 \times 103z = 34 \times 8;$$

ovvero in

$$8568 + 4088z - 10640 - 3502z = 272:$$

la riduzione del primo membro di questo resultato conduce a

$$586z - 2072 = 272,$$

dalla quale ricavasi

$$z = \frac{2344}{586}, \text{ ovvero } z = 4.$$

E risalendo dal valore di z a quello di y, avremo

$$y = \frac{37 \times 4 - 190}{34} = \frac{292 - 190}{34} = \frac{102}{34}, \text{ ovvero } y = 3;$$

e con questi due valori troveremo

$$x = \frac{28 + 4 \times 3 - 9 \times 4}{2} = \frac{28 + 12 - 36}{2} = \frac{4}{2},$$

ovvero $x = 2$.

Sono state dunque pagate pel trasporto d'un vaso piccolo 2 lire,
per quello d'un medio 3,
per quello d'un grande 4.

Quest' esempio serve per veder come bisogna operare in tutti gli altri casi.

81. Succede spesso che tutte le incognite non entrano a un tempo in tutte l' equazioni : questa circostanza non cangia però il metodo ; serve esaminar bene la concatenazione delle incognite per passare dall' une alle altre.

Sieno, per esempio, le quattro equazioni

$$3u - 2y = 2\,,$$
$$2x + 3y = 39\,,$$
$$5x - 7z = 11\,,$$
$$4y + 3z = 41\,,$$

contenenti le incognite u, x, y, e z.

Con un poco di attenzione si vede che, se si prende dalla seconda equazione il valore di x, per sostituirlo nella terza, il resultato contenendo allora y, e z, farà conoscere, nel combinarla con la quarta equazione, queste due quantità; poscia col valore di y avremo quelli di u, e x per mezzo della prima, e seconda equazione. Ed operando così faremo il seguente calcolo:

$$x = \frac{39 - 3y}{2}\,,$$

$$5 \times \frac{39 - 3y}{2} - 7z = 11\,,$$

ovvero

$$195 - 15y - 14z = 22\,,$$

oppure
$$15y + 14z = 173 \qquad (57)$$

Le due equazioni

$$15y + 14z = 173\,,$$
$$4y + 3z = 41\,,$$

essendo risolute, daranno

$$y = 5\,, \quad z = 7\,;$$

e, per mezzo di questi valori, avremo

$$x = \frac{39 - 3 \times 5}{2} = \frac{39 - 15}{2} = \frac{24}{2}\,, \text{ ovvero } x = 12\,;$$

$$u = \frac{2 + 2y}{3} = \frac{2 + 10}{3} = \frac{12}{3}\,, \text{ ovvero } u = 4:$$

i numeri cercati son dunque.

$$4\,,\ 12\,,\ 5\,,\ 7.$$

82. Il metodo, che ho esposto, s' applicherebbe all' equazioni letterali nello stesso modo che all' equazioni numeriche; ma la moltitudine delle lettere, che bisognerebbe impiegare per rappresentar generalmente i dati allorchè il numero dell' equazioni, e dell' incognite sorpassa 2, ha impegnato gli Algebristi a cercare una maniera d' esprimerli più semplicemente; io la farò conoscere nell' articolo seguente: ma, affine di dare al Lettore l' occasione d' esercitarsi a porre i Problemi in equazione, e a risolverli, ho riunito qui appresso un numero d' enunciati, ed ho indicato al termine di ciascuno i resultati, che si debbon trovare.

1. *Un padre essendo interrogato sull' età del suo figlio, risponde: se dal doppio dell' età, ch' egli ha adesso, voi togliete il triplo di quella, che aveva sei anni sono, avrete la sua età attuale.*

Risposta: *Il figlio aveva 9 anni.*

2. *Diofante, l' autore del più antico Libro d' Algebra, che ci resti, passò nella sua infanzia la sesta parte del tempo, ch' ei visse; e una dodicesima nell' adolescenza; dipoi si maritò, e passò in questa unione il settimo della sua vita, aumentato di cinque anni, prima d' avere un figlio, al quale egli sopravvisse quattr' anni, e questo figlio non arrivò che alla metà dell' età, alla quale pervenne suo padre: qual' età aveva Diofante allorchè morì?*

Risposta: *84 anni.*

3. *Un mercante preleva ogni anno dai fondi, che ha nel commercio, una somma di 1000 lire per le spese della sua famiglia: frattanto ogn' anno il suo capitale aumenta del terzo di ciò, che resta, ed alla fin di tre anni trovasi raddoppiato: quanto aveva il mercante al principio della prima annata?*

Risposta: *14800 lire.*

4. *Un mercante ha due specie di thé, la prima di 14 lire la libbra, la seconda di 18 lire: quanto dee prenderne di ciascuna specie per formarne una cassetta di 100 libbre, che costi 1680 lire?*

Risposta: *30 libbre della prima specie, e 70 della seconda.*

5. *È stato riempito in 12 minuti un vaso contenente 39 fiaschi d' acqua; facendovi versare successivamente due fontane, una delle quali somministrava 4 fiaschi per minuto, e l' altra 3: si domanda per quanti minuti ciascuna fontana ha versato?*

Risposta: *la prima per 3 minuti, e la seconda per 9.*

6. *Un orologio segnando mezzogiorno, la lancetta de' mi-*

nuti si trova sopra quella dell' ore: si domanda a qual punto della mostra si farà il prossimo futuro incontro delle lancette?

Risposta: *a quello, che indica 1 ora, 5 minuti e $\frac{5}{11}$.*

Osservazione. Questo Problema ha relazione con quello del n. 65.

7. *Un uomo incontrando de' poveri, vol dare a ciascuno 25 soldi; ma contando il suo denaro si accorge che gli mancano per far ciò 10 soldi; allora egli non dà che 20 soldi a ciascun povero, e gli avanzano 25 soldi: si domanda quanti soldi aveva quest' uomo, e qual' era il numero dei poveri?*

Risposta: *egli aveva 165 soldi, ed i poveri erano in numero di 7.*

8. *Tre fratelli hanno comperato uno stabile per 50000 lire: manca al primo per pagar egli solo quest' acquisto la metà del denaro, che ha il secondo; questo pagherebbe l' acquisto da se solo se si aggiungesse a quel, ch' egli possiede, il terzo di ciò, che ha il primo: finalmente il terzo avrebbe bisogno, per fare il medesimo pagamento, d' unire a ciò, che egli ha, il quarto di quel, che possiede il primo: quanto denaro ha ciascheduno di essi?*

Risposta: *il primo ha 30000 lire, il secondo 40000, ed il terzo 42500.*

9. *Dopo una partita di giuoco, tre giuocatori contano il loro denaro; uno solo avendo perduto, gli altri due hanno vinto ciascuno una somma eguale a quella, ch' essi hanno posta al giuoco; dopo una seconda partita uno dei giuocatori, che aveva vinto nella precedente, perde, e gli altri due vincon ciascuno una somma eguale a quella, ch' essi aveano al principio della seconda partita; a una terza partita il giuocatore, che fino allora avea vinto, perde con ciascuno degli altri due una somma eguale a quella, ch' essi avevano al principio di quest' ultima partita; ed allora cessano di giocare i tre giuocatori avendo ciascuno 120 lire: quanto avean essi al principio del giuoco?*

Risposta: *Quello, che ha perduto nella prima partita, aveva* *lire* 195,
quello, che ha perduto nella seconda 105;
quello, che ha perduto nella terza 60.

Formule generali per la risoluzione dell' equazioni di primo grado.

83. Ad oggetto d' ovviare all' inconveniente, che ho fatto osservare nel principio del num°. antecedente, s' è immaginato

di rappresentare colla stessa lettera tutti i coefficienti d' una medesima incognita, ma di distinguerli prendendoli affetti da uno, o più apici, secondo il numero delle equazioni.

L' equazioni generali a due incognite si scrivono come segue:

$$a\ x + b\ y = c,$$
$$a'\ x + b'\ y = c'.$$

I coefficienti dell' incognita x son rappresentati ambedue per a; quelli di y per b; ma l' apice, da cui sono affette le lettere della seconda equazione, fa vedere che queste lettere non si considerano come aventi il medesimo valore delle loro corrispondenti nella prima. Così a' è una quantità differente da a; b' una quantità differente da b.

Quando si hanno tre equazioni, si scrivono come segue:

$$a\ x + b\ y + c\ z = d,$$
$$a'\ x + b'\ y + c'\ z = d',$$
$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

Tutti i coefficienti dell' incognita x son denotati per la lettera a, quelli di y per b, quelli di z per c; ma ciascuna lettera è affetta da un numero differente di apici, i quali indicano ch' essa appartiene a diverse quantità. Così a, a', a'' son tre quantità differenti, e l' istesso delle altre lettere.

Seguendo questo andamento, se s' avessero quattro incognite, e quattro equazioni, si scriverebbero come segue:

$$a\ x + b\ y + c\ z + d\ u = e,$$
$$a'\ x + b'\ y + c'\ z + d'\ u = e'$$
$$a''\ x + b''\ y + c''\ z + d''u = e'',$$
$$a'''x + b'''y + c'''z + d'''u = e'''.$$

84. Affine di simplificare i calcoli, evitando le frazioni, si modifica il metodo dell' eliminazione nella maniera, che segue.

Sieno le equazioni

$$a\ x + b\ y = c,$$
$$a'\ x + b'\ y = c';$$

è evidente che se una dell' incognite, x, per esempio, avesse il medesimo coefficiente nelle due equazioni, basterebbe sottrarle l' una dall' altra, per fare sparir quest' incognita. Ciò rendesi manifesto a prima vista sull' equazioni

$$10\ x + 11y = 27,$$
$$10\ x + 9y = 15,$$

le quali danno

$11y - 9y = 27 - 15$, ovvero $2y = 12$, oppure $y = 6$.

È chiaro che possiam rendere immediatamente i coefficienti di x eguali nell'equazioni

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

moltiplicando i due membri della prima per a', coefficiente di x nella seconda, e i due membri della seconda per a coefficiente di x nella prima; con questo mezzo si ottiene,

$$aa'x + a'by = a'c,$$
$$aa'x + ab'y = ac'.$$

Dipoi togliendo la prima di queste dalla seconda, l'incognita x sparirà, ed avrem solamente

$$(ab' - a'b)\,y = ac' - a'c;$$

equazione, la quale altro non contiene che l'incognita y; e ne dedurremo

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Il metodo, che ho adesso impiegato, può sempre applicarsi all'equazioni di primo grado, per eliminare una dell'incognite qualunque siasi.

Eliminando nella stessa maniera l'incognita y, s'avrebbe il valore di x.

Se s' applica questo metodo alle tre equazioni contenenti x, y, e z, potremo primieramente eliminare x tra la prima e seconda, poi tra la prima e la terza; arriveremo così a due equazioni, che non conterranno altro che y, e z, e tra le quali elimineremo in seguito y.

Se si effettua il calcolo, l' equazione in z, alla quale arriveremo, avrà un fattore comune a tutti i suoi termini, e non sarà in conseguenza la più semplice, che si possa ottenere.

85. Bezout ha dato un metodo semplicissimo per eliminar simultaneamente tutte le incognite ad eccezione di una, ed in virtù del quale il problema immediatamente riducesi a dell'equazioni, le quali contengono un' incognita di meno che le proposte. Benchè questo metodo non sia necessario che quando si tratta d' equazioni a tre incognite, comincerò da applicarlo a quelle, le quali non ne contengon che due, a fin d'abbracciare compiutamente questo soggetto.

Sieno le due equazioni

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c',$$

moltiplicando, la prima per una quantità m, che sia indeterminata, verrà

$$amx + bmy = cm;$$

e togliendo da questo resultato l'equazione

$$a'x + b'y = c',$$

avremo

$$amx - a'x + bmy - b'y = cm - c',$$

ovvero

$$(am - a')\,x + (bm - b')\,y = cm - c'.$$

Poichè la quantità m è indeterminata, possiamo supporla tale che sia $bm = b'$. In questo supposto il termine moltiplicato per y disparendo, si ha

$$x = \frac{cm - c'}{am - a'};$$

ma a motivo di $bm = b'$, resulta

$$m = \frac{b'}{b}:$$

dunque

$$x = \frac{\frac{cb'}{b} - c'}{\frac{ab'}{b} - a'} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Se, in vece di supporre $bm = b'$, si fa $am = a'$, il termine affetto da x sarà distrutto, e verrà

$$y = \frac{cm - c'}{bm - b'}.$$

Il valore di m non sarà più lo stesso di quello pocanzi trovato; poichè avremo

$$m = \frac{a'}{a};$$

e, sostituendolo nel valore di y, troveremo

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}.$$

Cangiando i segni del numeratore, e del denominatore, di questo valore (57), il suo denominatore sarà lo stesso che quello di x, poichè avremo

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

86. Sieno adesso le tre equazioni

$$ax + by + cz = d,$$
$$a'x + b'y + c'z = d'$$
$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

L'analogia ci condurrà facilmente a moltiplicare respettivamente la prima e la seconda per due quantità indeterminate; m e n, a sommarle insieme, ed a toglierne la terza; poichè, per questo mezzo, esse saranno impiegate tutte nel tempo stesso, e le due nuove quantità m e n, delle quali è permesso disporre a piacere, potranno essere determinate in modo da fare sparire nel medesimo tempo due incognite dal resultato. Operando in tal maniera, e riunendo i termini, che moltiplicano una medesima incognita, avremo

$$(am + a'n - a'')x + (bm + b'n - b'')y + (cm + c'n - c'')z$$
$$= dm + d'n - d''.$$

Se vogliamo far sparire x, ed y, bisognerà per questo supporre l'equazioni

$$am + a'n = a'',$$
$$bm + b'n = b'';$$

ed allora verrà

$$z = \frac{dm + d'n - d''}{cm + c'n - c''}.$$

Dalle due equazioni, nelle quali m, ed n sono le incognite, è facile dedurre il valore di queste quantità per mezzo de' resultati ottenuti nel num. precedente; poichè serve cangiare x in m, y in n, e scrivere in luogo delle lettere

$$\left.\begin{matrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{matrix}\right\} \text{ le lettere } \left\{\begin{matrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{matrix}\right.$$

il che darà

$$m = \frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'},$$

$$n = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'};$$

Sostituendo questi valori in quello di z, e riducendo tutti i termini allo stesso denominatore, si troverà

$$z = \frac{d(b'a'' - a'b'') + d'(ab'' - ba'') - d''(ab' - ba')}{c(b'a'' - a'b'') + c'(ab'' - ba'') - c''(ab' - ba')}$$

Se si fossero fatti sparire i termini affetti da x, e da z, avremmo avuto y; le lettere m, e n sarebbero dipendute dalle due equazioni

$$am + a'n = a'', \quad cm + c'n = c'',$$

e, operando come qui sopra, si sarebbe trovato

$$y = \frac{d(c'a'' - a'c'') + d'(ac'' - ca'') - d''(ac' - ca')}{b(c'a'' - a'c'') + b'(ac'' - ca'') - b''(ac' - ca')}$$

Finalmente, ponendo l' equazioni

$$bm + b'n = b'', \quad cm + c'n = c'',$$

si farebbero disparire i termini moltiplicati per y, e per z; e s' otterrebbe.

$$x = \frac{d(c'b'' - b'c'') + d'(bc'' - cb'') - d''(bc' - cb')}{a(c'b'' - b'c'') + a'(bc'' - cb'') - a''(bc' - cb')}$$

Sviluppando questi valori in modo da rendere i loro termini alternativamente positivi, e negativi, e cangiando nel tempo stesso i segni del numeratore, e quelli del denominatore, nella prima e nella terza, potremo dar loro le forme seguenti:

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

87. Sieno le quattro equazioni

$$ax + by + cz + du = e,$$
$$a'x + b'y + c'z + d'u = e',$$
$$a''x + b''y + c''z + d''u = e'',$$
$$a'''x + b'''y + c'''z + d'''u = e''',$$

si moltiplicheranno la prima per m, la seconda per n, la

terza per p; si sommeranno i prodotti, e togliendone in seguito la quarta, troveremo

$$\begin{aligned}&(am+a'n+a''p-a''')x+(bm+b'n+b''p-b''')y\\+&(cm+c'n+c''p-c''')z+(dm+d'n+d''p-d''')u\\&=em+e'n+e''p-e'''\end{aligned}$$

Per aver u porremo

$$\begin{aligned}am+a'n+a''p&=a''',\\ bm+b'n+b''p&=b''',\\ cm+c'n+c''p&=c''';\end{aligned}$$

ed avremo

$$u=\frac{em+e'n+e''p-e''}{dm+d'n+d''p-d'''}.$$

L'equazioni precedenti, le quali debbono dare m, n, e p, si risolverebbero col mezzo delle formule trovate pel caso di tre incognite. Questo andamento dee sembrar comodissimo e semplicissimo; ma l'osservazione della forma de' resultati ottenuti qui sopra somministra il modo di ritrovarli senz' alcun calcolo.

88. Per risalire al primo anello della catena, prendo l'equazione a una incognita $ax=b$; ne ricavo

$$x=\frac{b}{a},$$

dove si vede che il numeratore è il termine cognito b, ed il denominatore è il coefficiente a dell' incognita.

Le due equazioni

$$ax+by=c,\quad a'x+b'y=c',$$

hanno dato

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},\quad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Il denominatore si compone ancor qui delle lettere a, a', b, b', che moltiplicano le incognite: si scrive primieramente la lettera a accosto alla lettera b, il che dà ab; si cangiano in seguito a, e b tra di loro per avere ba, e dando a questa disposizione il segno $-$, viene $ab-ba$; si pone finalmente un apice alla seconda lettera di ciascun termine: ecco formato il denominatore $ab'-ba'$.

Vediamo adesso in qual maniera possiam dedurne il numeratore. È facile il vedere che per quello di x si cangiano le

a in c, e i b in c per quello di y: poichè con tal mezzo si trova per uno $cb' - bc'$, e per l'altro $ac' - ca'$. *Il numeratore dunque deducesi dal denominatore*, nel caso di due incognite come nel caso di una sola, *cangiando il coefficiente dell'incognita, che cerchiamo, nel termine tutto cognito, e conservando d'altronde gli apici tali quali come essi sono.*

La sola ispezione dei valori resultanti dall'equazioni a tre incognite serve per far vedere ch'esse non isfuggono a questa regola. A riguardo del lor denominatore, bisogna un poco più d'attenzione per conoscerne la forma. Frattanto, poichè nel caso di due incognite il denominatore presenta tutte le disposizioni possibili di due lettere a, e b, che moltiplican queste incognite, è naturale il pensare che, quando vi saranno tre incognite, il denominatore debba contenere tutte le disposizioni delle tre lettere a, b, c; e per formare queste disposizioni con ordine, ci conterremo nella maniera seguente.

Si formano primieramente le disposizioni $ab - ba$ delle due lettere a e b; in seguito delle prima ab si scrive la lettera c, e si ottiene abc; e facendo passar questa lettera in tutti i posti, avendo l'attenzione di cangiare il segno ciascuna volta, e di non turbar l'ordine respettivo di a, e b, ne resulta

$$abc - acb + cab.$$

Operando nello stesso modo sulla seconda disposizione delle due lettere $-$ [illegible], si trova

$$- bac + bca - cba:$$

riunendo que[illegible]prodotti ai tre precedenti; poi segnando le seconde letter[illegible]on un apice, e le terze con due, s'ottiene

$$ab'c'' \ [illegible] \ c'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'';$$

res[illegible]orme a quello, che presentan le formule ottenute in[illegible]mente.

È facile concluder da ciò che, per formare il denominatore nel caso di quattro incognite, bisognerebbe introdurre la lettera d in ciascuno de' sei prodotti

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba,$$

e fare ad essa occupar successivamente tutti i posti; il prodotto abc, per esempio, somministrerebbe i quattro seguenti

$$abcd - abdc + adbc - dabc.$$

Operando nella stessa maniera sopra gli altri cinque prodotti di tre lettere, il resultato totale avrebbe ventiquattro termini,

in ciascuno de' quali la seconda lettera porterebbe un apice, la terza due, e la quarta tre. I numeratori della incognite u, z, y, e x si otterrebbero per mezzo della regola citata qui sopra (*).

89. Per far servire queste formule alla risoluzione dell'equazioni numeriche, bisognerà paragonar termine a termine l'equazioni proposte coll'equazioni generali de' numeri precedenti. Ad oggetto di risolvere, per esempio, le tre equazioni

$$7x + 5y + 2z = 79,$$
$$8x + 7y + 9z = 122,$$
$$x + 4y + 5z = 55,$$

bisognerà paragonare, termine a termine, queste equazioni con quelle del n.° 86, il che darà

$$a = 7,\ b = 5,\ c = 2,\ d = 79,$$
$$a' = 8,\ b' = 7,\ c' = 9,\ d' = 122,$$
$$a'' = 1,\ b'' = 4,\ c'' = 5,\ d'' = 55,$$

Sostituendo questi valori nell'espressioni generali dell'incognite x, y, e z, ed effettuando le operazioni indicate, troveremo

$$x = 4,\ y = 9,\ z = 3.$$

È importante osservare che le medesime espressioni serviranno ancora allorquando l'equazioni proposte non [illegible]vranno tutti i loro termini affetti dal segno $+$, come s[illegible]bran supporlo l'equazioni generali, da cui sono dedotte queste espressioni. Se si avessero, per esempio,

$$3x - 9y + 8z = 41$$
$$-5x + 4y + 2z = -2$$
$$11x - 7y - 6z = 37,$$

bisognerebbe, paragonando i termini di q[illegible]e equazioni ai loro corrispondenti nell'equazioni generali, [illegible] riguardo ai segni; il che darebbe

$$a = +3,\ b = -9,\ c = +8,\ d = [illegible]$$
$$a' = -5,\ b' = +4,\ c' = +2,\ d' = -20,$$
$$a'' = +11,\ b'' = -7,\ c'' = -6,\ d'' = +37,$$

(*) *Il Sig. Laplace, nella seconda Parte delle Memorie dell' Accademia delle Scienze per l'anno* 1772, *pagina* 294, *ha dimostrate queste regole* a priori. *Vedete ancora gli* Annali di Matematiche pure e applicate *del Sig.* Gergonne, *T. IV. pag.*

e determinare in seguito, conformemente alle regole del n. 31, il segno, che deve aver ciascun termine dell' espressioni generali di x, y, z avendo riguardo ai segni de' fattori, dei quali è composto. Operando in questa maniera si troverebbe, per esempio, che il primo termine del denominatore comune, ch' è $ab'c''$, divenendo $+3\times+4\times-6$, cangia di segno, e produce -72. Facendo la medesima attenzione a riguardo degli altri termini tanto dei numeratori, quanto dei denominatori, e prendendo da una parte la somma di quelli, che son positivi, e dall'altra di quelli, che son negativi, si troverà

$$x=\frac{2774-2834}{592-622}=\frac{-60}{-30}=+2,$$

$$y=\frac{3022-2932}{592-622}=\frac{+90}{-30}=-3,$$

$$z=\frac{3859-3889}{592-622}=\frac{-30}{-30}=+1.$$

Dell' equazioni di secondo grado a una sola incognita.

90 Nell' equazioni, che ho trattato fin qui, le incognite non arrivavano che alla prima potenza, ovvero non eran moltiplicate tra loro: queste equazioni non erano che del *primo grado*; ma, se solamente si proponesse il problema seguente: *Trovare un numero, il quale essendo moltiplicato pel suo quintuplo, il prodotto sia eguale a* 125, denotando questo numero per x, il suo quintuplo sarebbe $5x$, e si avrebbe

$$5x^2=125.$$

Questa equazione è del *secondo grado* perchè contiene x^2, ovvero la seconda potenza dell' incognita. Se questa seconda potenza si libera dal suo coefficiente 5, otterremo

$$x^2=\frac{125}{5},\text{ ovvero } x^2=25.$$

Non si saprebbe concludere il valor dell'incognita come nel n.° 11, ed il problema proposto è solamente condotto a trovare un numero, il quale moltiplicato per se stesso dia

25. Con nn poco di attenzione si riconosce che questo numero è 5, ma succede raramente che si possa indovinare così la risoluzione cercata; siamo dunque condotti a questo nuovo Problema numerico: *Trovare un numero, che moltiplicato per se stesso dia un prodotto eguale ad un numero proposto*, ovvero, ch' è la stessa cosa, ritornar dalla seconda potenza al numero, che l' ha prodotta, e che si chiama la sua *radice quadrata*. Vo ad occuparmi primieramente della risoluzione di questo Problema, perchè dessa servirà per determinare le inognite in tutte l' equazioni di secondo grado.

91. Il metodo, che bisogna impiegare all' oggetto di trovare, o *estrar* le radici dei numeri, suppone che si conoscano le seconde potenze di qnelli, che sono espressi per mezzo d' nna sola cifra; ecco dunque i nove primi numeri colle loro seconde potenze scritte al disotto di ciascheduno

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, \\ 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36, & 49, & 64, & 81. \end{matrix}$$

Si vede da qnesta Tavola la seconda potenza d' un numero espresso da una sola cifra non ne contien più di due: 10, ch' è il più piccol numero espresso da due cifre, n' ha tre nel suo quadrato 100. Per prepararsi a decomporre la seconda potenza d' nn numero espresso da due cifre, bisogna prima studiarne la formazione; e, per questo, passo a cercare come ciascuna parte del numero 47, per esempio, concorra alla produzione del quadrato di questo numero.

Si può decomporre il 47 in $40+7$, cioè in 4 decine, e 7 nnità; rappresentando per a le decine del numero proposto, e per b le sue unità, la di lui seconda potenza sarà espressa per

$$(a+b)\,(a+b) = a^2 + 2ab + b^2;$$

e vale a dire, ch' essa conterrà tre parti, cioè: *il quadrato delle decine, due volte il prodotto delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità*. Nell' esempio, che ho scelto, $a = 4$ decine, ovvero 40 unità, e $b = 7$; abbiamo dunque

$$\begin{aligned} a^2 &= 1600 \\ 2ab &= 560 \\ b^2 &= 49 \end{aligned}$$

$$\text{Totale } a^2 + 2ab + b^2 = 2209 = 47 \times 47.$$

Per ritornare adesso dal nnmero 2209 alla sua radice 47, osserveremo primieramente che il quadrato delle decine, 1600, non ha cifre significative d' un ordine inferiore alle centinaia,

e ch'egli è il maggior quadrato, che possano contenere le 22 centinaia di 2209, poichè 22 cade tra 16, e 25, vale a dire tra il quadrato di 4, e quello di 5, come il 47 cade tra 4 decine, ovvero 40, e 5 decine, ovvero 50.

Se dunque cerchiamo il maggior quadrato contenuto in 22 troveremo 16, la cui radice 4 esprimerà le decine di quella di 2209: togliendo in seguito 16 centinaia, ovvero 1600, da 2209, il resto 609 conterrà ancora il doppio prodotto delle decine per le unità, cioè 560, ed il quadrato delle unità, ovvero 49. Ma il doppio prodotto delle decine per le unità non avendo cifre d'un ordine inferiore alle decine, deve trovarsi nelle due prime cifre 60 del resto 609, le quali conterranno in oltre le decine provenute dal quadrato delle unità. Frattanto, se dividiamo 60 per 8, ch'è il doppio delle decine, avremo, trascurandone il resto, un quoziente 7 eguale alle unità cercate. Dipoi, moltiplicando 8 per 7, formeremo il doppio prodotto delle decine per le unità, cioè 560, e togliendolo dal resto totale 609, otterremo una differenza 49, la quale debb'essere, e lo è difatto, il quadrato delle unità.

L'operazione, della quale ho qui ragionato, si dispone nel modo seguente:

22,09	47
16	87
60,9	
60 9	
000	

Si scrive il numero proposto come se si trattasse di dividerlo per un altro, e si destina per la radice il posto, che dovrebbe occupare il divisore. Dipoi si separano per mezzo di una virgola le unità, e le decine, affine di non considerare che le due prime cifre sulla sinistra, le quali debbono contenere il quadrato delle decine della radiee. Si cerca il maggior quadrato 16 contenuto in queste due cifre; si porta la radice 4 al posto, che le è stato destinato, e si toglie 16 da 22; allato del resto 6 s'abbassano le due altre cifre 09 del numero proposto; si separa l'ultima, che non entra nel doppio prodotto delle decine per le unità, si divide la parte restante a sinistra per 8, doppio delle decine della radice, il che dà per quoziente le unità 7; e per formar simultaneamente le due ultime parti del quadrato, che deggion esser contenute in 609, si scrive 7 allato di 8, e ne resulta 87, eguale al doppio delle decine, più le unità, ovvero $2a+b$, e

che essendo moltiplicato per 7, ossia per b, riproduce 609 $= 2ab + b^2$, ovvero il doppio prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità: facendo la sottrazione non resta niente, e l'operazione terminata, dimostra che 47 è la radice quadrata di 2209.

Si debba ancora estrar la radice quadrata da 324; dispongo l'operazione nel modo, che segue:

```
3,24 |18
1    |
---- |----
22,4 |28
22 4 |
---- |
00 0
```

e secondo ciò, che è stato già detto, trovo 1 per le decine della radice; queste decine essendo raddoppiate, mi danno il numero 2; per il quale bisogna dividere le due prime cifre 22 del resto. Ora 22 contiene 2 undici volte, e nella radice non solamente non si può avere nè più di 10, nè 10; ma anco il 9 stesso sarebbe troppo grande nel caso attuale, poichè scrivendo 9 allato di 2, e moltiplicando 29 per 9, come lo prescrive la regola, s'averebbe per resultato 261, il quale non potrebbe togliersi da 224. Non si deve dunque riguardare la divisione di 22 per 2 sennonchè come un mezzo approssimativo per trovar le unità, e bisogna diminuire il quoziente ottenuto fino a tanto che arrivisi ad un prodotto, che non sorpassi il resto 224; condizione, alla quale sodisfà il numero 8, poichè $8 \times 28 = 224$; dunque la radice cercata è 18.

Formando le tre parti del quadrato di 18, si trova:

$$a^2 = 100$$
$$2ab = 160$$
$$b^2 = 64$$

Totale $\qquad 324 = 18 \times 18.$

e si vede che le sei decine, le quali sono contenute nel quadrato delle unità, essendo riunite a 160, doppio prodotto delle decine per le unità, alteran questo prodotto di maniera che la divisione pel doppio delle decine non può più dare le sole unità.

92. L'estrazione della radice quadrata di un numero composto di tre, o quattro cifre, non può arrecare alcuna difficoltà dopo ciò, che precede; ma sono necessarie ancora a sa-

persi alcune particolarità per porre il Lettore in istato di estrar la radice da un numero espresso da quante cifre si vogliano; e vedremo che tali particolarità dipendono dai principî digià spiegati.

Ogni numero al disotto di 100 non avrà più di quattro cifre nel suo quadrato, poichè quello di 100 è 10000, ovvero il più piccol numero espresso da cinque cifre. Ciò posto, per esaminare la formazione del quadrato di un numero al di sopra di 100, di 473, per esempio, si potrà decompor questo numero in 470+3, ovvero 47 decine più 3 unità; e per dedurre il suo quadrato dalla formula

$$a^2 + 2ab + b^2$$

faremo $a = 47$ decine $= 470$ unità, $b = 3$ unità, donde

$$\begin{array}{lr} a^2 = & 220900 \\ 2ab = & 2820 \\ b^2 = & 9 \\ \hline \text{Totale} & 223729 = 473 \times 473. \end{array}$$

Si vede in quest'esempio che il quadrato delle decine non ha cifre significative di un ordine inferiore alle centinaia; e ciò debb'essere in generale, poichè delle decine moltiplicate per delle decine producono sempre delle centinaia (*Aritm.32*).

Dunque nella parte 2237, che resta sulla sinistra del numero proposto, dopo che n'avremo separate le diecine, e le unità, dobbiamo cercare il quadrato delle decine; e siccome 473 cade tra 47 decine, ovvero 470, e 48 decine, ovvero 480, il 2237 deve cadere tra il quadrato di 47, e quello di 48; dal che segue che il maggior quadrato contenuto in 2237 sarà quello di 47, ovvero delle decine della radice. È evidente che, per ritrovar queste decine, bisogna operare come se si volesse estrarre la radice quadrata da 2237; ma, in vece di giungere ad un resultato esatto, si troverà un resto contenente le centinaia formate dal doppio prodotto delle 47 decine moltiplicate per le unità.

Per effettuare il calcolo, si dispone l'operazione come si vede qui apresso:

$$\begin{array}{l|l} 22,37,29 & 473 \\ \hline 16 & 87 \\ \hline 63,7 & 943 \\ 60\ 9 & \\ \hline 282,9 & \\ 282\ 9 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

Si separano in primo luogo le due ultime cifre 29, e per estrar la radice dal numero 2237, che resta sulla sinistra, si separano pure le due ultime cifre 37 di questo numero; in tal maniera il numero proposto è diviso in membri di due cifre andando dalla destra verso la sinistra. S'opera sopra i primi due membri come abbiam fatto nel numero precedente sul numero 2209, e si ottengono le due prime cifre 47 della radice; ma si trova un resto 28, il quale, unito alle due cifre 29 dell'ultimo membro contiene il doppio del prodotto delle 47 decine per le unità, ed il quadrato delle unità. Si separa la cifra 9, la quale non può far parte del doppio prodotto delle decine per le unità, e si divide 282 per 94, doppio delle 47 decine; scrivendo il quoziente 3 allato del 94, e moltiplicando 943 per 3, viene 2829, numero precisamente eguale all'ultimo resto, e l'operazione è così terminata.

93. Per far vedere come si debba operare sopra un numero qualonque, estrarrò adesso la radice da 22391824. Qualunque sia questa radice, possiamo sempre concepirla decomposta in decine, e in unità come negli esempî precedenti. Il quadrato delle decine non avendo alcuna cifra significativa di un ordine inferiore alle centinaia, e le due ultime cifre 24 non potranno esservi comprese; si separeranno dunque, e il problema sarà ridotto primieramente a cercare il maggior quadrato contenuto nella parte 223918, che resta a sinistra. Questa parte essendo composta di più di due cifre, bisogna concludere che il numero, il quale esprime le decine della radice cercata, ha più di una cifra; questo numero può dunque anch'esso esser decomposto in decine, e unità. Il quadrato di queste decine non entrando nelle due ultime cifre 18 della parte 223918, bisognerà dunque cercarlo nelle cifre 2239, che restano a misura; e poichè anche 2239 ha più di due cifre, il quadrato, che egli deve contenere, ne conterrà almeno due nella sua radice; il numero esprimente le decine, che noi cerchiamo, avrà perciò più di una cifra; adunque finalmente bisognerà cercare nel 22 il quadrato di quel numero, che rappresenta le unità dell'ordine il più elevato della dimandata radice. Da questa serie di ragionamenti, che si possono spingere tanto lontano quanto vorremo, il numero proposto si troverà diviso in membri di due cifre andando dalla destra a sinistra: è necessario nulladimeno di esser prevenuti che l'ultimo membro a sinistra potrà contenere una sola cifra.

Il numero proposto essendo così diviso in membri e disposto come si vede nell'esempio, che segue, si opera sui tre primi mem-

bri come nell'esempio del n.° precedente, ed allorchè avrem trovate le tre prime cifre 473, allato al resto 189 abbasseremo il quarto membro 24, e si considererà il numero 18924 come contenente il doppio prodotto delle 473 decine trovate per le unità cercate, più il quadrato di queste unità. Si separa l'ultima cifra 4, e si dividono quelle, che restano a sinistra, per 946, doppio di 473, e si fa in seguito la verificazione del quoziente 2, come nelle operazioni antecedenti.

```
22, 39, 18, 24 | 4732
16             | 87
------------   | 943
63, 9          | 9462
60  9
------------
 301 , 8
 282   9
------------
 1892, 4
 1892  4
------------
 0000  0
```

L'operazione in questo esempio è compiuta; ma è facil vedere che, se vi fosse una casella di più; le quattro cifre trovate 4732 esprimerebbero le decine di una radice, di cui si cercherebbero le unità, e che, per conseguenza, bisognerebbe dividere il resto, che allora si avrebbe, più la prima cifra del membro seguente pel doppio di queste decine, e così di seguito per ciascuno dei membri da abbassarsi successivamente.

94. Se succedesse che, dopo avere abbassato un membro, il resto unito alla prima cifra di questo membro non contenesse il doppio delle cifre trovate, bisognerebbe porre zero nella radice, poichè allora la radice non avrebbe unità di quest'ordine: si abbasserebbe in seguito il membro seguente per continuare l'operazione secondo il solito.

L'esempio qui unito è relativo a questo caso. Non si sono scritte le quantità da sottrarsi, ma si son effettuate le sottrazioni a mente, come nella divisione.

```
49,42,09 | 703
04,20,9  | 1403
00 00 0  |
```

95. Tutti i numeri proposti non son quadrati perfetti, e gettando gli occhi sulla Tavola della pagina 105 si vede che tra i quadrati di ciascuno dei nove primi numeri esistono delle alcune comprendenti più numeri, i quali non hanno radice; 45, per esempio, non è un quadrato, poichè cade tra 36, e 49. Succederà il più delle volte che il numero, del quale si cercherà la radice quadrata, non l'avrà ma operando come se il numero l'avesse, il resultato sarà la radice del maggior quadrato possibile, ch'esso contiene. Se si cerca per esempio, la radice di 2276, troveremo 47, e resterà 67; il che dimostra che il maggior quadrato contenuto in 2276 è quello di 47, ovvero 2209.

Siccome potrebbe restar dubbiezza, dopo d'aver trovata la radice del maggior quadrato contenuto in un numero, d'aver posta qualche cifra troppo piccola nella radice, ecco un mez-

zo di riconoscere se il resto sia troppo considerabile, e se la radice trovata sia troppo piccola. Il quadrato di $a+b$ essendo

$$a^2 + 2ab + b^2,$$

se facciamo $b = 1$, il quadrato di $a + 1$ sarà

$$a^2 + 2a + 1;$$

quantità, che differisce da a^2, quadrato di a, del doppio di a più l' unità. Dunque, *se la radice trovata dovesse essere aumentata dell' unità, o di più dell' unità; bisognerebbe che il suo quadrato, tolto dal numero proposto, lasciasse un resto almeno eguale a due volte questa radice, più l' unità.* Tutte le volte che questa circostanza non avrà luogo, la radice estratta sarà sicuramente quella del maggior quadrato contenuto nel numero proposto.

96. Poichè, per moltiplicare una frazione, per una frazione, bisogna moltiplicare i numeratori tra loro, come pure i denominatori, è manifesto che il prodotto d' una frazione per se stessa, ovvero *il quadrato d' una frazione è eguale al quadrato del suo numeratore diviso per il quadrato del suo denominatore.* Segue da ciò che, *per estrarre la radice quadrata da una frazione, bisogna estrar quella del suo numeratore, e quella del suo denominatore.* Così la radice di $\frac{25}{64}$ è $\frac{5}{8}$, perchè 5 è la radice di 25: e 8 quella di 64.

È una cosa importantissima da osservarsi che non solamente i quadrati delle frazioni propriamente dette son sempre delle frazioni, ma che *ogni numero frazionario irriducibile, essendo moltiplicato per se stesso, darà sempre un numero frazionario pure irriducibile.*

97. Questa proposizione riposa sulla seguente: *Ogni numero primo* P, *che divide il prodotto* AB *di due numeri* A, *e* B, *divide necessariamente uno di questi numeri.*

Suppongo che esso non divida B, e che B lo sorpassi, designando con q il quoziente intero di questa divisione, e con B' il resto, avremo

$$B = qP + B',$$

di dove moltiplicando per A, dedurremo

$$AB = qAP + AB',$$

e dividendo i due membri di quest' equazione per P, n' otterremo

$$\frac{AB}{P} = qA + \frac{AB'}{P};$$

di dove resulta che la divisibilità di AB per P porta seco quella del prodotto AB' pel medesimo numero. Ora B' essendo il resto della divisione di B per P, è necessariamente minore di P; così non potendosi dividere B' per P, si dividerà P per B': avremo un quoziente q', ed un resto B''; quindi divideremo P per B'', ed avremo un quoziente q'' ed un resto B''', e così di seguito, poichè P è un numero primo.

Ciò posto avremo, questa serie d' equazioni

$$P = q'B' + B'' \qquad P = q''B'' + B''', \text{ ec.};$$

e moltiplicando ciascuna di queste equazioni per A, otterremo

$$AP = q'AB' + AB''; \; AP = q''AB'' + AB'''; \text{ ec.};$$

dividendo per P, verrà

$$A = q'\frac{AB'}{P} +, \frac{AB''}{P}, \; A = q''\frac{AB''}{P} + \frac{AB'''}{P}, \text{ ec.};$$

resultati i quali fanno vedere che AB' essendo divisibile per P, i prodotti AB'', AB''', ec. lo devon essere pure. Ma i resti B', B'', B''', ec. divenendo sempre più piccoli, si deve cader finalmente sull' unità, poichè le operazioni indicate qui sopra si continuano nella stessa maniera fintantochè i resti sorpassano 1, attesochè P è un numero primo; e quando siamo arrivati all' unità, abbiamo il prodotto $A \times 1$, che dev' essere divisibile per P: dunque ancor A dev' essere divisibile per P.

Segue da ciò che, se il numero primo P, il quale si suppone non divider B, non divide neppure A, non dividerà nemmeno il prodotto di questi numeri.

(*Questa dimostrazione è, presso a poco, estratta dalla* Teoria dei numeri di M. Legendre) (*).

98. Frattanto allorchè la frazione $\frac{b}{a}$ è irriducibile, non vi è alcun numero primo, che possa dividere ad un tempo b ed a; e siccome, dopo ciò che precede, ogni numero intero, che non divida a, non può dividere $a \times a$, ovvero

(*) *È facile a vedere, che questa Proposizione si estende ad un prodotto composto di tanti fattori quanti vorremo, e che se questi fattori sono tutti numeri primi, il prodotto non può esser diviso per nessun altro numero; il che dimostra che la decomposizione di un numero in fattori semplici* (Aritm. 162) *non può effettuarsi che in una sola maniera.*

a^2, e qualunque numero primo, che non divida b, non divide neppure $b \times b$, ovvero b^2; dunque allora i numeri a^2 e, b^2 sono primi tra loro; ed in conseguenza il quadrato $\frac{b^2}{a^2}$ della frazione $\frac{b}{a}$, essendo irriducibile come questa frazione, non potrebbe mai essere un numero intero.

99. Resulta da quest' ultima proposizione che *tutti i numeri interi, i quali non son quadrati perfetti, non hanno radice non solamente in numeri interi, ma neppure in numeri frazionari*. Frattanto si concepisce che dev' esistere una quantità, che moltiplicata per se stessa produca un numero qualunque, 2276, per esempio, e che in tal caso questa quantità è compresa tra 47, e 48; poichè 47×47 dà un prodotto minore di questo numero, 48×48 ne dà uno maggiore; e dividendo l' intervallo, che v' è tra 47, e 48, in frazioni, si trovan dei numeri, i quali moltiplicati per loro stessi danno dei prodotti maggiori del quadrato di 47, minori di quello di 48, ed approssimanti di più in più al numero 2276.

L' estrazione della radice quadrata applicandola a' numeri, i quali non son quadrati perfetti, dà dunque origine ad una nuova specie di numeri, nello stesso modo, che la divisione genera le frazioni; ma vi è questa differenza tra le frazioni, e le radici de' numeri, i quali non son quadrati perfetti, cioè che i primi, i quali si compongono sempre d' un numero esatto di parti dell' unità, hanno con quest' unità una *misura comune*, ovvero un rapporto espresso da dei numeri interi, laddove che i secondi non l' hanno.

Se si concepisca l' unità come divisa in cinque parti, per esempio, s' esprime con nove di queste parti, il quoziente della divisione di 9 per 5, ovvero $\frac{9}{5}$; $\frac{1}{5}$ essendo contenuto cinque volte nell' unità, e nove volte in $\frac{9}{5}$ è la *comune misura* dell' unità, e della frazione $\frac{9}{5}$; ed il rapporto di queste quantità è quello dei numeri interi 5, e 9.

E considerando che i numeri interi, come pur le frazioni, hanno coll' unità una misura comune si dice che queste quantità sono *commensurabili* coll' unità, ovvero semplicemente *commensurabili*; e perchè i loro *rapporti*, o *ragioni* con l'unità son espresse da numeri interi, s' indicano pure i numeri interi, e le frazioni sotto la comune denominazione di *numeri razionali*.

Al contrario la radice quadrata di un numero; il quale non è quadrato perfetto, è *incommensurabile*, ovvero *irrazionale*;

perchè non potendo essere rappresentata da alcuna frazione, ne segue che in qualunque numero di parti si supponga divisa l'unità, non ve ne sarà mai alcuna, per quanto piccola sia, che possa misurare nel medesimo tempo, ed in una maniera esatta, questa radice, e l'unità.

Per indicare in generale una radice da estrarsi, sia che si possa ottenerla esattamente, o nò, ci serviamo del segno $\sqrt{\ }$ che chiamasi *radicale*;

$\sqrt{16}$ è la stessa cosa che 4,

$\sqrt{2}$ è *incommensurabile*, o *irrazionale*.

100. Benchè non si possa per mezzo di alcun numero intero, o frazionario ottenere un' espressione esatta di $\sqrt{2}$, nulladimeno possiamo approssimarvi di tanto quanto si vuole, convertendo questo numero in una frazione, il cui denominatore sia un quadrato; e la radice del numeratore, presa solamente in numero intero, darà quella del numero proposto, espressa, in parti della specie indicata dalla radice quadrata del denominatore.

Se si converta, per esempio, il numero 2 in 25.mi, avremo $\frac{50}{25}$. La radice di 50 essendo 7 in numero intero, e quella di 25 essendo esattamente 5, avremo $\frac{7}{5}$, ovvero $1\frac{2}{5}$ per la radice di 2; valore, che differisce dal vero meno d'un quinto.

101. È manifesto da questa operazione fondata sopra ciò, che abbiamo veduto nel num.° 96, cioè che il quadrato d'una frazione era espresso da una nuova frazione, la quale aveva per numeratore il quadrato del numerator primitivo, e per denominatore il quadrato del denominator primitivo, s' applica a qualunque specie di frazioni che sia, e più facilmente ancora alle decimali, che a tutte l'altre. Infatti segue dal suo principio, che il quadrato d'un numero espresso in decimi debb' esser composto di centesimi; che quello d'un numero espresso in centesimi debb' esserlo in diecimillesimi e così di seguito; e che in conseguenza *il numero delle cifre decimali del quadrato è sempre doppio di quello delle cifre della radice*. Quest' ultima osservazione può dedursi ancora dal principio della moltiplicazione de' numeri decimali, il quale vuole che un prodotto contenga tante cifre decimali quante ve ne sono insieme in uno dei fattori e nell' altro. Nel caso attuale, il numero proposto, come il prodotto della sua radice moltiplicata per se stessa, deve aver due volte tante cifre decimali quante n'ha questa radice.

Essendo ben inteso ciò che precede, è facil concluderche, se si vuole ottenere la radice quadrata di 227, per esemp

pio, approssimata fino ai centesimi, bisogna ridur questo numero in diecimillesimi, e vale a dire, aggiungere quattro zeri alla destra di questo numero, il che darà 2270000 decimillesimi, da cui n'estrarremo la radice come da un simil numero d'unità; ma per indicare che il resultato debb'essere in centesimi, separeremo con una virgola le due ultime cifre sulla destra. Troveremo in questa maniera che la radice di 227, dentro l'errore più piccolo d'un centesimo, è 15,06. Eccone l'operazione:

2,27,00,00	1506
12,7	25
2 00 00	3006
19 64	

Se il numero proposto contenesse di già dei decimali, bisognerebbe renderne il loro numero pari, come lo esige l'estrazione della radice. Affine d'estrarre, per esempio, la radice da 51,7, si porrebbe uno zero in seguito di questo numero perchè egli avesse almeno dei centesimi, e si estrarrebbe in appresso la radice quadrata da 51, 70. Se si volesse avere una decimale di più, si porrebbero altri due zeri in seguito di questo numero, il che darebbe 51, 7000, e troverebbesi 7, 19 per la sua radice.

Quei, che vorranno esercitarsi, potran cercare le radici quadrate de' numeri 2, e 3 con sette cifre decimali, il che esigerà ch' essi pongano quattordici zeri alla destra di questi numeri, e dovran trovare per resultati

$$\sqrt{2} = 1,4142136, \quad \sqrt{3} = 1,7320508.$$

102. Allorchè si è trovato più della metà delle cifre, che si vogliono avere nella radice, si può ottenerne il rimanente mediante la sola divisione. Sia, per esempio; 32976; la radice quadrata di questo numero è 181 con un resto 215; dividendo questo resto 215 per 362 doppio di 181, e spingendo il quoziente fino a due decimali, avremo 0,59, che bisognerà unire a 181, e ne resulterà 181,59 per la radice di 32976, esatta almeno fino ai centesimi.

Per provar la legittimità di ciò che precede, indico per N il numero proposto, per a la radice del maggior quadrato contenuto in questo numero, e per b ciò che bisogna aggiungere a questa radice affine d'aver la radice esatta del numero proposto; avremo, dietro a queste denominazioni,

$$N = a^2 + 2ab + b^2,$$

ovvero

$$N - a^2 = 2ab + b^2;$$

e dividendo per $2a$, troveremo

$$\frac{N-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}.$$

Questo resultato dimostra che il primo membro potrà esser preso per il valore di b ogni qual volta la quantità $\frac{b^2}{2a}$ sarà minore d' un' unità dell' ordine meno elevato, che trovisi in b. Ma il quadrato d' un numero non potendo avere al più che due volte tante cifre quante n' ha questo numero, ne segue, che, se il numero delle cifre di a sorpassa il doppio di quelle di b, la quantità $\frac{b}{2a}$ sarà allora una frazione.

Nell' esempio precedente $a=181$ unità, ovvero 18100 centesimi, ha per conseguenza una cifra di più del quadrato di 59 centesimi; così la frazione $\frac{b^2}{2a}$ diviene allora $\frac{3481}{36200}$, e si trova assai al di sotto di un' unità della seconda parte 59, ovvero di un centesimo di unità della prima.

103. Ciò conduce ad un metodo per approssimarsi alla radice quadrata di un numero per mezzo delle frazioni ordinarie, continuando indefinitamente il metodo dell' estrazione delle radici; esso è fondato su ciò che a essendo la radice del maggior quadrato contenuto in N, b è necessariamente una frazione, e la quantita $\frac{b^2}{2a}$ essendo allora assai più piccola di b, si può trascurare.

Debbasi, per esempio, estrar la radice quadrata da 2; il maggior quadrato contenuto in questo numero essendo 1, dopo di averlo tolto resta 1. Dividendo questo resto pel doppio della radice, si trova $\frac{1}{2}$; prendendo questo quoziente per la quantità b, si ottiene, per una prima approssimazione della radice, $1+\frac{1}{2}$, ovvero $\frac{3}{2}$. Alzando questa radice al quadrato, si trova $\frac{9}{4}$, che tolti da 2, ovvero da $\frac{8}{4}$, danno per resto $-\frac{1}{4}$. In questo caso la formula

$$\frac{N-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}$$

diviene

$$-\tfrac{1}{12}=b+\frac{b^2}{2a}:$$

prendendo $-\tfrac{1}{12}$ per b, verrà per la seconda approssimazione, $\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{12}=\tfrac{17}{12}$; quadrando $\tfrac{17}{12}$, si troverà $\tfrac{289}{144}$, quantità che sorpassa ancor 2, ovvero $\tfrac{288}{144}$. Sostituendo $\tfrac{17}{12}$ in luogo di a, resulterà

$$-\frac{1}{12\times34}=b+\frac{b^2}{2a}:$$

il che darà

$$b=-\frac{1}{12\times34}=-\frac{1}{408}:$$

la terza approssimazione sarà dunque

$$\frac{17}{12}-\frac{1}{12\times34}=\frac{17\times34-1}{408}=\frac{577}{408}.$$

È facile continuar quest' operazione quanto vorrassi. Darò nel *Complemento* di questo Trattato altre formule più comode per estrarre le radici generalmente.

104. All' effetto d' approssimarsi alla radice quadrata di una frazione, l' idea, che si offre in principio, è quella di estrarre per approssimazione la radice quadrata del numeratore, e quindi quella del denominatore; ma facendo un poco di riflessione, ci accorgeremo ben presto che si può evitare una di queste operazioni, operando in modo che il denominatore sia un quadrato perfetto, il che non riducesi ad altro che a moltiplicare i due termini della frazione proposta pel denominatore suddetto. Se si avesse, per esempio, da estrar la radice quadrata da $\tfrac{3}{7}$, si cangerebbe questa frazione in

$$\frac{3\times7}{7\times7}=\frac{21}{49},$$

moltiplicando i suoi due termini pel denominatore 7. La radice del numeratore di quest' ultima frazione, essendo presa in numeri interi, dà $\tfrac{4}{7}$ per quella di $\tfrac{3}{7}$; e questo resultato differisce dal vero meno di un settimo

Per conseguire un maggior grado di esattezza, bisognerebbe convertire, almeno per approssimazione, la frazione $\tfrac{3}{7}$ in un' altra, il cui denominatore fosse il quadrato d' un numero

maggiore di 7. Avrebbesi, per esempio, approssimata fino a $\frac{1}{15}$ la radice cercata, se si convertisse $\frac{3}{7}$ in 225mi, poichè 225 è il quadrato di 15; così verrebbe $\frac{675}{7}$ di 225mi, ovvero $\frac{96\frac{3}{7}}{225}$, valore, che differisce dal vero meno di $\frac{1}{225}$: la radice di $\frac{96}{225}$ è tra $\frac{9}{15}$, e $\frac{10}{15}$, ma si approssima più alla seconda frazione che alla prima, perchè 96 è più vicino a 100 che a 81: si avrebbe dunque $\frac{10}{15}$, ovvero $\frac{2}{3}$ per la radice di $\frac{3}{7}$, prossima al vero più di $\frac{1}{15}$.

Se si volessero impiegare i decimali per estrar la radice approssimata dal numeratore della frazione $\frac{21}{49}$, si troverebbe 4,583 per la radice approssimata del numeratore 21, e si dividerebbe questo resultato per la radice del nuovo denominatore. Spingendo il quoziente fino alla terza decimale, si troverebbe 0, 655.

105. Siamo attualmente in istato di risolvere tutte l'equazioni, nelle quali non entra che la seconda potenza dell'incognita combinata con delle quantità cognite.

Serve per questo di *riunire in un solo membro tutti i termini affetti da questa potenza, poi liberarla dei suoi moltiplicatori per la regola del n.° 11, si ottiene il valor dell'incognita, estraendo la radice quadrata dall'altro membro.*

Sia, per esempio, l'equazione

$$\frac{7}{3}x^2-8=4-\frac{2}{5}x^2.$$

Facendo sparire i divisori, trovasi primieramente

$$15x^2-168=84-14x^2.$$

Trasportando nel primo membro il termine $14x^2$, e nel secondo il termine 168, otterremo

$$15x^2+14x^2=84+168,$$

ovvero $$29x^2=252,$$

e $$x^2=\frac{252}{29}$$

$$x=\sqrt{\frac{252}{29}}$$

Bisogna osservar bene che per indicar la radice della frazione $\frac{252}{29}$ si deve far passare il segno $\sqrt{}$ al disotto della linea, che separa il numeratore dal denominatore. Se avessi scritto $\frac{\sqrt{252}}{29}$, quest'espressione avrebbe indicato il quoziente che dà la radice quadrata del numero 252 quando si divide per 29; resultato ben differente dal primo, nel quale la di-

visione debb' essere effettuata prima dell' estrazione della radice.

Sia ancora l' equazione letterale

$$ax^2 + b^3 = cx^2 + d^3\ ;$$

operando come sulla precedente, avremo successivamente

$$ax^2 - cx^2 = d^3 - b^3$$

$$x^2 = \frac{d^3 - b^3}{a - c}\ ;$$

$$x = \sqrt{\frac{d^3 - b^3}{a - c}}$$

Farò osservare in questa occasione che, quando si vuole indicar la radice quadrata d' una quantità complessa bisogna prolungar la linea superiore del radicale sopra tutta la quantità.

La radice della quantità $4a^2b - 2b^3 + c^3$ si scriverebbe nel modo seguente

$$\sqrt{4a^2b - 2b^3 + c^3}\ ,$$

ovvero ancora

$$\sqrt{}\,(4a^2b - 2b^3 + c^3)\ ,$$

sostituendo alla linea superiore del radicale una parentesi contenente tutte le parti della quantità, dalla quale bisogna estrar la radice; e quest' ultima espressione può delle volte sembrare preferibile all' altra (35).

In generale, qualunque equazione di secondo grado della specie, che qui considero, potrà, per mezzo della trasposizion de' suoi termini, esser ridotta alla forma

$$\frac{px^2}{q} = a\ ,$$

$\frac{p}{q}$ indicando il coefficiente, qualunque sia, di x^2; e ricaveremo

$$x^2 = \frac{aq}{p}\ ,$$

$$x = \sqrt{\frac{aq}{p}}\ .$$

106. Per rapporto ai numeri assoluti questa risoluzione è completa, poichè essa riducesi a praticar sopra il numero, sia intero, sia frazionario, che rappresenta la quantità $\frac{aq}{p}$, un' operazione aritmetica, la quale conduce sempre ad un resultato esatto, o approssimante al vero di tanto quanto vorrassi; ma avendo riguardo ai segni, dai quali le quantità posson essere affette, l' estrazione della radice quadrata lascia un' ambiguità, mediante la quale ogni equazione di secondo grado è suscettibile di due soluzioni, mentre che quelle di primo grado non n' hanno che una.

Infatti, nell' equazione generale $x^2=25$, il valore di x essendo la quantità, che alzata al quadrato produce 25, esso potrà, se si considerano le quantità algebriche, essere affetto indifferentemente dal segno $+$, o dal segno $-$; poichè sia che s' indichi per $+5$, o per -5, avremo egualmente pel suo quadrato

$$+5\times+5=+25, \text{ ovvero } -5\times-5=+25:$$

possiam dunque prendere

$$x=+5,$$

ovvero

$$x=-5.$$

Per la stessa ragione, dall' equazione generale

$$x^2=\frac{aq}{p},$$

rioaveremo indifferentemente

$$x=+\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

ovvero

$$x=-\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

Queste due espressioni comprendonsi nella seguente

$$x=\pm\sqrt{\frac{aq}{p}},$$

ove il doppio segno $\pm$ denota che può essere affetto alternativamente dal segno $+$, o dal segno $-$ il valor numerico di

$$\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

Nasce da ciò, che abbiamo osservato, questa regola generale, cioè, *che bisogna dare alla radice quadrata di una quantità qualunque il doppio segno* $\pm$.

Seguendo questa regola, si potrebbe domandare perchè, x essendo la radice quadrata di x^2, non si dà anco a x il doppio segno $\pm$. Risponderemo primieramente col sig. Develey (*Algebra d'Emilio*, T. II.) che la lettera x essendo stata posta semplicemente senza segno (e vale a dire col segno $+$,) come simbolo dell' incognita, fa di mestieri determinare il valore in questo stato; e che quando si cerca un numero x, il cui quadrato sia b, per esempio, non vi sono che queste due soluzioni possibili: $x = +\sqrt{b}$, $x = -\sqrt{b}$. Oltrediccio, quand' anco, risolvendo l' equazione $x^2 = b$, si scrivesse $\pm x = \pm\sqrt{b}$, e si disponessero questi segni in tutti i modi possibili, cioè,

$$+x = +\sqrt{b}, \quad -x = -\sqrt{b},$$
$$+x = -\sqrt{a}, \quad -x = +\sqrt{b},$$

non si otterrebbe nulla di più; poichè, cangiando il segno dei membri della seconda equazione di ciascuna linea (57), ricaderebbesi sulla prima.

107. Segue pure dalla considerazione de' segni che, se il secondo membro dell' equazion generale

$$x^2 = \frac{aq}{p}$$

fosse un numero negativo, l' equazione sarebbe assurda; poichè il quadrato di una quantità affetta tanto dal segno $+$ quanto dal segno $-$, essendo sempre affetto dal segno $+$, non si può trovare nè nell' ordine delle quantità positive, nè in quello delle negative alcuna quantità, il cui quadrato sia negativo.

Si esprime questa particolarità allorchè diciamo che *la radice di una quantità negativa è immaginaria*.

Se si arrivasse all' equazione

$$x^2 + 25 = 9,$$

se ne ricaverebbe

$$x^2 = 9 - 25,$$

ovvero

$$x^2 = -16:$$

ora, non v' è alcun numero, che moltiplicato per se stesso possa produrre -16. È vero per altro che -4 moltiplicato per $+4$ dà -16; ma queste due quantità, avendo un segno

diverso, non posson esser considerate come eguali, ed il loro prodotto non è per conseguenza un quadrato. Vedremo in seguito nuovi schiarimenti su questa specie di contradizione, che bisogna ben distinguere da quella del n.° 58, che un semplice cangiamento nel segno dell' incognita ha fatto sparire: nel caso presente è il segno del quadrato x^2, che bisognerebbe cangiare.

108. Un' equazione di secondo grado ad una sola incognita, per esser completa, deve contenere tre specie di termini: cioè, termini affetti dal quadrato dell' incognita, altri affetti dall' incognita al primo grado, altri finalmente tutti cogniti: tali sono l' equazioni

$$x^2-4x=12 \qquad 4x-\tfrac{3}{5}x^2=4-2x.$$

La prima è, a qualche riguardo, più semplice della seconda, perchè essa non contiene che tre termini, e perchè il quadrato di x è preso positivamente, e non ha per coefficiente che l' unità. L' equazioni di secondo grado, prima di risolverle si pongono sempre sotto quest' ultima forma; di tal maniera che desse possono esser allora rappresentate dalla formola seguente

$$x^2+px=q,$$

p, e q indicando quantità cognite, sì positive, che negative.

È manifesto che ridurremo qualunque equazione di secondo grado a questo stato, 1.° passando in un sol membro tutti i termini affetti da x (10); 2.° cangiando il segno a ciascun termine dell' equazione per render positivo quello di x^2, se esso fosse negativo in principio (57); 3.° dividendo tutti i termini dell' equazione pel moltiplicatore di x^2, se questo quadrato lo ha (11), ovvero moltiplicando pel suo divisore, se desso è diviso (12).

Applicando queste regole all' equazione

$$4x-\tfrac{3}{5}x^2=4-2x,$$

essa diviene, allorchè si passano nel primo membro i termini affetti da x,

$$-\tfrac{3}{5}x^2+6x=4;$$

quando si cangiano i segni,

$$\tfrac{3}{5}x^2-6x=-4;$$

quando si moltiplica pel divisore 5,

$$3x^2-30x=-20,$$

e quando dividesi pel moltiplicato 3,

$$x^2 - 10x = -\frac{20}{3}.$$

Paragonando quest' equazione colla formula generale

$$x^2 + px = q,$$

s' avrebbe, per questo caso particolare,

$$p = -10, \; q = -\frac{20}{3}.$$

109. Affine d' arrivare alla soluzione delle equazioni così preparate, bisogna rammentarsi quello, che ho fatto osservare (34), cioè, che il quadrato d' una quantità composta di due termini contiene sempre il quadrato del primo termine, il doppio del primo termine moltiplicato per il secondo, ed il quadrato del secondo; e che per conseguenza il primo membro dell' equazione

$$x^2 + 2ax + a^2 = b,$$

nella quale a, b sono quantità cognite, è un quadrato perfetto, cioè quello di $x + a$, ovvero che ne resulta

$$(x + a)(x + a) = b,$$

Prendendo la radice quadrata del primo membro, e indicandone quella del secondo, avremo

$$x + a = \pm \sqrt{b};$$

equazione, che non è più se non che del primo grado per rapporto all' incognita x, e dà, trasponendo,

$$x = -a \pm \sqrt{b}.$$

Un' equazione di secondo grado sarebbe dunque facilmente risoluta s' essa fosse ridotta alla forma

$$x^2 + 2ax + a^2 = b,$$

e vale a dire, se il suo primo membro fosse un quadrato.

Ma il primo membro dell' equazione generale

$$x^2 + px = q$$

contiene digià due termini, che possono riguardarsi come facienti parte del quadrato d' un binomio, cioè x^2, che sarà il quadrato del primo termine x, e px, che sarà il doppio del primo moltiplicato per il secondo, il quale non può essere in conseguenza se non che la metà di p, ovvero $\frac{1}{2}p$. Per terminare il quadrato del binomio $x + \frac{1}{2}p$, sarebbe necessario ancora il quadrato del secondo termine $\frac{1}{2}p$; ma que-

sto quadrato può esser formato, poichè p, e $\frac{1}{2}p$ sono quantità cognite, e può quindi essere aggiunto al primo membro, purchè s' aggiunga nel medesimo tempo ancora al secondo, affine di conservarne l' eguaglianza; e quest' ultimo membro resterà anco adesso tutto cognito.

Il quadrato di $\frac{1}{2}p$ essendo $\frac{1}{4}p^2$, la sua somma coi due membri dell' equazione proposta

$$x^2 + px = q$$

la cangia nella seguente

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = q + \tfrac{1}{4}p^2;$$

resultato, il cui primo membro è il quadrato di $x + \frac{1}{2}p$: prendendo dunque la radice quadrata dei due membri, ho

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2} \qquad (106),$$

e trasponendo, viene

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2},$$

dalla quale successivamente ricavasi

$$x = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2},$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}.$$

Ho dato il segno $+$ al secondo termine $\frac{1}{2}p$ dalla radice del primo membro dell' equazione proposta a causa che il secondo termine di questo membro era positivo; fa di mestieri porre il segno $-$ nel caso contrario, perchè il quadrato $x^2 - 2ax + a^2$ corrisponde al binomio $x - a$.

La risoluzione d' un' equazione qualunque di secondo grado si otterrà paragonando quest' equazione alla formula generale

$$x^2 + px = q,$$

oppure applicando immediatamente all' equazione proposta l' operazione, che abbiamo fatta su questa formula, la quale può enunciarsi nel modo che segue:

Rendere il primo membro dell' equazione proposta un quadrato perfetto, aggiungendovi, come al secondo membro, il quadrato della metà della quantità data, che moltiplica la prima potenza dell' incognita; eguagliare in seguito le radici quadrate di ciascun membro, avvertendo che quella del primo è composta dell' incognita, e della metà della quantità data, che la moltiplica nel secondo termine, presa col segno di questa quantità, e che la radice del secondo membro debb' essere preceduta dal doppio segno $\pm$, e indicata dall' altro segno $\sqrt{\ }$, s' essa non può ottenersi immediatamente.

Eccone degli esempî.

110. *Trovare un numero tale, che aggiungendolo 7 volte al suo quadrato, la somma sia 44.*

Indicando per x il numero cercato, l'equazione sarà evidentemente.

$$x^2+7x=44.$$

Per risolverla, prendo $\frac{7}{2}$, metà del coefficiente 7, che moltiplica x, ed alzandoli a quadrato ho la quantità $\frac{49}{4}$, che aggiungo a ciascun membro nel modo, che segue,

$$x^2+7x+\frac{49}{4}=44+\frac{49}{4};$$

e riducendo il secondo membro in una sola frazione, viene

$$x^2+7x+\frac{49}{4}=\frac{225}{4}.$$

La radice quadrata del primo membro è, secondo la regola precitata, $x+\frac{7}{2}$, e si trova per quella del secondo $\frac{15}{2}$; abbiamo dunque l'equazione

$$x+\frac{7}{2}=\pm\frac{15}{2},$$

dalla quale ricavasi

$$x=-\frac{7}{2}\pm\frac{15}{2},$$

ovvero

$$x=-\frac{7}{2}+\frac{15}{2}=\frac{8}{2}=4,$$

$$x=-\frac{7}{2}-\frac{15}{2}=-\frac{22}{2}=-11.$$

Il primo valore di x risolve il Problema nel senso del suo enunciato, poichè abbiamo per questo valore

$$x^2=16,$$
$$7x=28,$$

Somma . . . . 44.

Quanto al secondo, siccome esso è affetto dal segno —, il termine $7x$ diventando

$$7\times-11=-77;$$

debb' esser tolto da x^2, in modo che l'enunciato del Problema risoluto col numero 11 è il seguente:

Trovare un numero tale, che tolto 7 volte dal suo quadrato, resti 44.

Il valore negativo modifica dunque qui il Problema in una maniera analoga a quella, che abbiamo veduta per l'equazioni di primo grado.

Se si ponesse in equazione l'enunciato qui sopra, otterrebbesi

$$x^2 - 7x = 44,$$

e risolvendola verrebbe

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = 44 + \frac{49}{4},$$

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \frac{225}{4}$$

$$x - \frac{7}{2} = \pm \frac{15}{2},$$

$$x = \frac{7}{2} \pm \frac{15}{2},$$

$$x = \frac{22}{2} = 11,$$

$$x = \frac{7}{2} - \frac{15}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Il valor negativo di x è divenuto positivo, perchè sodisfà letteralmente al nuovo enunciato, ed il valor positivo, che non vi sodisfà nello stesso modo, è divenuto negativo.

Da ciò si fa chiaro che rispetto al secondo grado, l' Algebra riunisce nella medesima formula due Problemi, che hanno tra loro una certa analogia.

111. Qualche volta gli enunciati, i quali conducono ad equazioni di secondo grado, son suscettibili di due soluzioni; il seguente è in questo caso:

Trovare un numero, che, se s' aggiunga 15 al suo quadrato, la somma sia eguale a 8 volte lo stesso numero.

Sia x il numero cercato; l' equazione del Problema sarà

$$x^2 + 15 = 8x.$$

E ponendo quest' equazione sotto la forma prescritta dal n.° 108, avremo

$$x^2 - 8x = -15,$$
$$x^2 - 8x + 16 = -15 + 16,$$
$$x^2 - 8x + 16 = 1,$$
$$x - 4 = \pm 1,$$
$$x = 4 \pm 1,$$
$$x = 5,$$

ovvero

$$x = 3$$

Vi son dunque due numeri differenti 5, e 3, i quali godono della proprietà compresa nell' enunciato.

112. Alcune volte pure s' incontrano degli enunciati, i quali non posson essere risoluti in verun modo nel loro senso preciso, e che debbono esser modificati; uno di questi casi è quello dove le due radici dell' equazione son negative, come quelle della seguente

$$x^2 + 5x + 6 = 2.$$

Questa equazione, la quale esprime che *il quadrato del numero, che si cerca, aumentato di 5 volte questo numero, e ancora di 6, dee dare una somma eguale a 2*, non può evidentemente essere verificata per via di somma come richiedesi; poichè digià il 6, sorpassa 2: in fatti, se si risolva l'equazione, trovasi successivamente

$$x^2 + 5x = -4,$$

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4},$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm\frac{3}{2},$$

$$x - -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1,$$

$$x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -4.$$

I segni —, dai quali son affetti i numeri 1, e 4, fanno vedere che il termine $5x$ debb' esser tolto dagli altri, ovvero che l' enunciato dee, per i due valori, esser espresso come segue:

Trovare un numero tale, che se si tolga 5 volte dal suo quadrato, e che al resto si aggiunga 6, s'abbia 2 per resultato.

Quest' enunciato somministra l' equazioni

$$x^2 - 5x + 6 = 2,$$

che dà per x i due valori positivi 1, e 4.

113. Sia dato ancora questo problema:

Dividere un numero p *in due parti, il cui prodotto sia eguale a* q.

Denotando per x una di queste parti, l'altra sarà espressa da $p-x$, e il loro prodotto sarà $px-x^2$; avremo dunque l'equazione

$$px-x^2=q,$$

ovvero, cangiando i segni,

$$x^2-px=-q:$$

risolvendo quest' ultima equazione, si troverà

$$x=\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}.$$

Se per particolarizzare il problema, si facesse

$$p=10, \quad q=21,$$

si avrebbe

$$x=5\pm\sqrt{25-21},$$

oppure

$$x=5\pm 2,$$

$$x=7,$$

$$x=3;$$

e vale a dire che una delle parti sarebbe 7, e l'altra sarebbe per conseguenza 10—7, ossia 3.

Se al contrario si prendesse 3 per x, l'altra parte sarebbe 10—3, ovvero 7; di maniera che, per rapporto all' enunciato attuale, il problema non ha, a parlar propriamente, che una soluzione, poichè la seconda non è che un cangiamento d'ordine tra le parti.

L'ispezione attenta del valore di x fa vedere che nel problema, di cui si tratta, non si possono prendere affatto arbitrariamente i numeri p, e q; poichè se q sorpassasse $\frac{p^2}{4}$, ovvero il quadrato di $\frac{1}{2}p$, la quantità $\frac{p^2}{4}-q$ sarebbe negativa, e si ricaderebbe sul carattere d'assurdità osservato nel n.° 107.

Se si prendesse, per esempio,

$$p=10, \quad e \; q=30,$$

si averebbe

$$x=5\pm\sqrt{25-30}=5\pm\sqrt{-5};$$

il problema sarebbe dunque impossibile con questi dati.

114. L'assurdità dei problemi, che conducono a delle radici immaginarie, non si manifesta che in virtù della conclusione; e dobbiamo desiderar di conoscere da dei caratteri,

che sieno più prossimi all'enunciato, in che cosa consista l'assurdità del problema, dalla quale resulta quella della sua soluzione, questo è ciò che ci sarà fatto conoscere in una maniera precisa dalla considerazione seguente.

Sia d la differenza delle due parti del numero proposto; la maggiore sarà $\frac{p}{2}+\frac{d}{2}$, la minore $\frac{p}{2}-\frac{d}{2}$ (3); ora, è dimostrato (29, 30, e 34) che

$$\left(\frac{p}{2}+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{d}{2}\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4};$$

dunque il prodotto delle due parti del numero proposto, qualunque esse sieno, sarà sempre minore di $\frac{p^2}{4}$, ovvero del quadrato della metà della loro somma, fino a che d non sarà nullo; e quando questa circostanza abbia luogo, ciascuna di queste due parti essendo eguale a $\frac{p}{2}$, il loro prodotto non è che $\frac{p^2}{4}$. Egli è dunque assurdo il dimandare che esso sia maggiore; ed è con ragione che l'Algebra, rispondendo allora in una maniera contradittoria ai principî, ci mostra chiaro con questo che ciò, che cerchiamo, non esiste.

Ciò che si è dimostrato sull'equazione

$$x^2-px=-q;$$

ottenuta dal precedente problema, conviene a tutte quelle del secondo grado ove q è negativo nel secondo membro, le sole, nelle quali si possano incontrare delle radici immaginarie, poichè il termine $\frac{p^2}{4}$ posto sotto il radicale conserva sempre il segno $+$, qualunque sia quello di p. Infatti, quando si avesse l'equazione

$$x^2+px=-q\text{ , ovvero }x^2+px+q=0\text{ ,}$$

si vedrebbe subito che essa non potrebbe ammettere alcuna soluzione positiva, poichè il suo primo membro non contiene

che termini additivi; e per sapere se l' incognita x potesse essere negativa, servirebbe cangiare x in $-y$. L'incognita y avrebbe allora de' valori positivi, i quali sarebbero dati dall' equazione

$$y^2-py+q=0 \quad , \quad \text{ovvero } y^2-py=-q \, ,$$

precisamente la stessa che quella del numero precedente: ora i valori di x non potendo essere reali se non che quando lo fossero quelli di y, essi diverrebbero ancora immaginarî nel caso attuale, se q sorpassasse $\frac{p^2}{4}$.

Si vede dunque dalle osservazioni fatte qui sopra come, e perchè, *allorquando il termine tutto cognito di un' equazione del secondo grado è negativo nel secondo membro, e maggiore del quadrato della metà del coefficiente della prima potenza dell' incognita, quest' equazione non può avere che delle radici immaginarie.*

115. L' espressioni

$$\sqrt{-b}\,, \quad a+\sqrt{-b}$$

ed in generale quelle, che comprendono la radice quadrata di una quantità negativa, si chiamano *quantità immaginarie* (*). Queste altro non sono che dei simboli di assurdità, i quali tengono il luogo del valore, che avremo ottenuto se il problema proposto fosse stato possibile.

Non si trascuran essi nel calcolo, poichè succede qualche volta che combinandoli, dietro a certe leggi, l' assurdità si distrugge, ed il resultato diviene reale. Se ne troveranno degli esempî nel *Complemento*.

116. Siccome importa molto pei principianti di acquistare delle nozioni esatte sopra tutti i *fatti* d' Analisi, che sembrano allontanarsi dall' idee comuni, ho creduto che bisognasse ancora aggiungere qualche schiarimento a ciò, che abbiamo veduto (106) sulla necessità d' ammettere due soluzioni nell' equazioni di secondo grado.

Vo a dimostrare che, *se esiste una quantità* a, *la quale sostituita in luogo di* x *sodisfaccia all' equazione di secondo grado* $x^2+px=q$, *e sia, per conseguenza il valore di* x, *questa incognita avrà ancora un altro valore.* Difatto, se sostituiscasi a in luogo di x, ne resulterà $a^2+pa=q$; e poichè

(*) *Sarebbe più esatto il dire* espressioni, o simboli immaginarî, *poichè queste non son quantità.*

per ipotesi, a è il valore di x, q sarà necessariamente eguale alla quantità a^2+pa: potremo dunque scrivere questa quantità in luogo di q nell' equazione proposta, la quale diventerà perciò

$$x^2+px=a^2+pa.$$

Trasportando tutti i termini del secondo membro nel primo, verrà

$$x^2+px-a^2-pa=0,$$

che potremo scriver così:

$$x^2-a^2+p(x-a)=0;$$

ed a motivo che

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)(34),$$

si vede immediatamente che il primo membro è divisibile per $x-a$, e dà un quoziente esatto, cioè, $x+a+p$: abbiamo dunque, dietro a ciò,

$$x^2+px-q=x^2-a^2+p(x-a)=(x-a)(x+a+p).$$

Ora egli è manifesto che un prodotto è eguale a zero allorquando uno qualunque de' suoi fattori diviene zero; si deve dunque avere

$$(x-a)(x+a+p)=0$$

non solamente quando $x-a=0$, il che dà

$$x=a$$

ma ancora quando $x+a+p=0$, da cui resulta

$$x=-a-p.$$

È dunque dimostrato che, se a è un dei valori di x, $-a-p$ sarà necessariamente l' altro.

Questo resultato si accorda coi due valori compresi nella formula

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2};$$

poichè, prendendo per a il primo, $-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, per esempio si troverebbe per l' altro

$$-a-p=+\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2}-p=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2};$$

che è infatti il secondo valore.

Tornerò in seguito sopra queste osservazioni, le quali contengono il germe della Teoria generale dell' equazioni di un grado qualunque.

117. La difficoltà di porre i problemi in equazione è per

il secondo grado, e in generale per qualunque grado che sia, la stessa che per il primo, e consiste sempre nella maniera di sviluppare tutte le condizioni distinte, comprese nell'enunciato, e di esprimerle per mezzo dei caratteri Algebrici. I problemi precedenti non offrivano alcuna difficoltà a questo riguardo, e dobbiamo essere sufficientemente esercitati riguardo a quelli del primo grado: frattanto passo a risolvere alcuni problemi, i quali daranno luogo a diverse utili osservazioni.

Si sono impiegati due operai, i quali guadagnano dei salari differenti; il primo, essendo stato pagato alla fine d'un certo numero di giorni, ha ricevuto 96 lire; e il secondo, che ha lavorato 6 giorni di meno, non ha avuto che 54 lire: se questo avesse lavorato tutti i giorni, e l'altro avesse mancato per 6 giorni, averebbero ricevuto ambedue la stessa somma: si domanda quanti giorni ciascuno ha lavorato, ed il prezzo della loro respettiva giornata?

Questo problema, che sembra a prima vista contenere molte incognite, si risolve facilmente per mezzo di una sola, perchè l'altre si esprimono immediatamente per mezzo di questa.

Denotando per x il numero de' giorni del lavoro del primo operaio,

$x-6$ sarà quello de' giorni del lavoro del secondo,

$\frac{96l.}{x}$ sarà il prezzo della giornata del primo operaio,

$\frac{54l.}{x-6}$ quello della giornata del secondo;

se quest'ultimo avesse lavorato per x giorni, avrebbe guadagnato

$$x \times \frac{54}{x-6}, \text{ ovvero } \frac{54x}{x-6},$$

ed il primo lavorando solamente per $x-6$ giorni, non averebbe avuto che

$$(x-6)\frac{96}{x}, \text{ ovvero } \frac{96(x-6)}{x}:$$

l'equazione del problema sarà dunque

$$\frac{54x}{x-6} = \frac{96(x-6)}{x}.$$

È necessario primieramente fare sparire i denominatori di questa equazione, e s'ottiene

$$54x^2 = 96(x-6)(x-6);$$

i numeri 54, e 96 essendo ambedue divisibili per 6, si simplifica questo resultato, e si trova

$$9x^2 = 16(x-6)(x-6).$$

Potrebbesi preparare questa equazione secondo la regola del num.° 108. affin di risolverla; ma l' oggetto di questa regola non essendo che quello di facilitar l' estrazione della radice di ciascun membro dell' equazione proposta, essa è inutile in questo caso, ove i due membri si presentano immediatamente sotto la forma di quadrati; poichè è manifesto che $9x^2$ è il quadrato di $3x$, e che $16(x-6)(x-6)$ è il quadrato di $4(x-6)$: avremo dunque immediatamente.

$$3x = \pm 4(x-6),$$

da cui resulta

$$3x = 4x - 24, \quad x = 24;$$

$$3x = -4x + 24, \quad x = \frac{24}{7}.$$

Mercè la prima soluzion del problema, il primo operaio ha lavorato 24 giorni, ed ha guadagnato, per conseguenza, $\frac{96 l.}{24}$, ovvero 4 lire per giorno, laddove che il secondo non ha lavorato che 18 giorni, ed ha guadagnato $\frac{54 l.}{18}$, ovvero tre lire per giorno.

La seconda soluzione corrisponde ad un altro problema numerico legato coll' equazione proposta in una maniera analoga a quella, che ho osservata nel n.° 111.

118. *Si trasmettono ad un Banchiere due cambiali tratte sulla stessa persona; la prima di 550 lire pagabile in sette mesi; la seconda di 720 lire pagabile in quattro mesi; ed esso dà per pagamento totale una somma di 1200 lire: si domanda qual sia stato il frutto annuale, secondo il quale queste cambiali sono state scontate?*

A fine d' evitare le frazioni nell' espressione dei frutti per sette mesi, e per quattro, rappresenterò per $12x$ quello che produce annualmente una somma di 100 lire; ed allora il frutto d' un mese sarà x. Ciò posto, il valore presente della prima cambiale s' otterrà facendo la proporzione

$$100 + 7x : 100 :: 550 : \frac{55000}{100+7x} \quad (\textit{Aritm.}\ 120):$$

il valore presente della seconda cambiale resulterà parimente dalla proporzione

$$100+4x : 100 :: 720 : \frac{72000}{100+4x}.$$

Riunendo questi due valori, l'equazion del problema sarà

$$\frac{55000}{100+7x}+\frac{72000}{100+4x}=1200.$$

I due membri potendosi dividere per 200, si ha

$$\frac{275}{100+7x}+\frac{360}{100+4x}=6;$$

facendo in seguito sparire i denominatori, si trova successivamente

$$275(100+4x)+360(100+7x)=6(100+7x)(100+4x);$$
$$27500+1100x+36000+2520x=$$
$$60000+6600x+168x^2,$$

che riducesi a

$$168x^2+2980x=3500;$$

e dividendo tutto per 2, s'ottiene

$$84x^2+1490x=1750,$$

che dà finalmente

$$x^2+\frac{1490}{84}x=\frac{1750}{84}.$$

Paragonando questa equazione colla formula

$$x^2+px=q,$$

si ottiene

$$p=\frac{1490}{84},\ q=\frac{1750}{84},$$

e l'espressione

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

si cangia in

$$x=-\frac{745}{84}\pm\sqrt{\frac{745.745}{84.\ 84}+\frac{1750}{84}}.$$

È necessario primieramente ridurre ad una sola le frazioni comprese sotto il radicale: avremo

$$\frac{745.745+1750.84}{84.84}=\frac{702025}{84.84};$$

e osservando che il denominatore di questa frazione è un quadrato perfetto, altro non resterà che da estrar la radice quadrata dal numeratore. Se si limita questa radice ai millesimi troveremo 837, 869, per quella di 702025; e dandole per denominatore 84, i valori di x saranno

$$x=-\frac{745}{84}+\frac{837,869}{84}=\frac{92,869}{84},$$

$$x=-\frac{745}{84}-\frac{837,869}{84}=-\frac{1582,869}{84}.$$

Il primo di questi valori è il solo, che risolva il problema nel senso del suo enunciato. Dividendo il suo denominatore per 12, avremo (*Arit.* 54)

$$12x=\frac{92,869}{7}=13,267;$$

e vale a dire che il frutto annuo è di 13,267 per 100.

119. Il problema seguente è degno d'attenzione per le circostanze, che presenta l'espression dell'incognita.

Dividere un numero in due parti, i cui quadrati sieno in un dato rapporto.

Sia a il numero dato,
m il rapporto de' quadrati delle sue due parti
x una di queste parti,
l'altra sarà $a-x$;
e dietro all'enunciato del problema avrem l'equazione

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}=m.$$

Si presentano due strade conducenti a risolverla: possiamo o prepararla per darle la forma $x^2+px=q$, e risolverla in seguito col metodo generale; ovvero, profittando dell'avvertenza facile a farsi che la frazione

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}$$

è un quadrato, poichè il suo numeratore, ed il suo denominatore sono quadrati, ne concluderemo immediatamente

$$\frac{x}{a-x}=\pm\sqrt{m},$$
$$x=\pm(a-x)\sqrt{m}.$$

Risolvendo separatamente le due equazioni del primo grado comprese in questa formula, cioè,

$$x=+(a-x)\sqrt{m},$$
$$x=-(a-x)\sqrt{m},$$

ne ricaveremo

$$x=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}},$$
$$x=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}.$$

Per la prima soluzione, la seconda parte del numero proposto è

$$a-\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}=\frac{a+a\sqrt{m}-a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}=\frac{a}{1+\sqrt{m}};$$

e le due parti

$$\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}},\ \text{e}\ \frac{a}{1+\sqrt{m}}$$

sono, come lo esige l' enunciato del problema, ambedue minori del numero proposto.

Per la seconda soluzione, abbiamo

$$a+\frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}=\frac{a-a\sqrt{m}+a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}=\frac{a}{1-\sqrt{m}};$$

e le due parti sono allora

$$-\frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}},\ \text{e}\ \frac{a}{1-\sqrt{m}}.$$

I loro segni essendo contrarî, il numero a non è più, a parlar propriamente, la loro somma, ma la loro differenza.

Allorchè si fa $m = 1$, e vale a dir si suppone che i quadrati delle due parti cercate sono eguali, abbiamo

$$\sqrt{m} = 1;$$

la prima soluzione dà due parti eguali

$$\frac{a}{2}, \frac{a}{2};$$

resultato evidente per se medesimo, mentre che la seconda soluzione dà due resultati infiniti (68), cioè,

$$\frac{-a}{1-1}, \text{ ovvero } \frac{-a}{0}, \text{ e } \frac{a}{1-1}, \text{ ovvero } \frac{a}{0};$$

il che debb' essere, poichè non è che riguardando due quantità come infinitamente grandi per rapporto alla lor differenza a che si può supporre il rapporto dei loro quadrati eguale all' unità.

Infatti, sieno x, e $x-a$ queste due quantità; il rapporto de' lor quadrati sarà

$$\frac{x^2}{x^2-2ax+a^2},$$

e dividendo i due termini di questa frazione per x^2, essa diverrà

$$\frac{1}{1-\frac{2a}{x}+\frac{a^2}{x^2}};$$

ora, è visibile che quanto più il numero x sarà grande, più le frazioni $\frac{2a}{x}$, $\frac{a^2}{x^2}$ saranno piccole, e più il rapporto qui sopra si approssimerà ad esser eguale a $\frac{1}{1}$, ovvero a 1.

120. Per paragonare adesso coll' andamento, che abbiam tenuto, il metodo generale, svilupperemo l' equazione

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)} = m;$$

avremo successivamente

$$x^2 = m(a-x)(a-x)$$
$$x^2 = a^2m - 2amx + mx^2,$$
$$x^2 - mx^2 + 2amx = a^2m,$$
$$(1-m)x^2 + 2amx = a^2m,$$

$$x^2 + \frac{2amx}{1-m} = \frac{a^2m}{1-m};$$

e facendo $p = \frac{2am}{1-m}$, $q = \frac{a^2m}{1-m}$

la formula generale darà

$$x = -\frac{am}{1-m} = \sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m}}$$

Questi valori di x sembrano assai differenti da quelli, che sono stati trovati di sopra; tuttavia essi vi si riducono, e l'esempio, di cui mi occupo, può esser utile per far veder l'importanza delle trasformazioni, che le diverse operazioni algebriche producono nell'espressioni, delle quantità.

È necessario primieramente ridurre al medesimo denominatore le due frazioni comprese sotto il radicale, il che s'affettuerà moltiplicando per $1-m$ i due termini della seconda; e verrà.

$$\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m} = \frac{a^2m^2 + a^2m(1-m)}{(1-m)(1-m)} =$$
$$\frac{a^2m^2 + a^2m - a^2m^2}{(1-m)(1-m)} = \frac{a^2m}{(1-m)(1-m)}.$$

Il denominatore essendo un quadrato resterà solamente da estrarre la radice dal numeratore, e s'avrà

$$\sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m}} = \frac{\sqrt{a^2m}}{1-m};$$

ma l'espresione $\sqrt{a^2m}$ può ancora simplificarsi.

È manifesto che il quadrato d'un prodotto si compone del prodotto de' quadrati di ciascuno dei suoi fattori, poichè, per esempio,

$$bcd \times bcd = b^2c^2d^2,$$

e che, per conseguenza, la radice di $b^2c^2d^2$ non è altra cosa che il prodotto delle radici b, c, e d dei fattori b^2, c^2, e d^2. Applicando questa osservazione al prodotto a^2m, si vede che la sua radice è il prodotto di a, radice di a^2, per $\sqrt{m}$, ch'è l'indicazione della radice di m, ovvero che

$$\sqrt{a^2m} = a\sqrt{m}$$

Segue da queste trasformazioni diverse che

$$x = -\frac{am}{1-m} \pm \frac{a\sqrt{m}}{1-m},$$

ovvero
$$x = -\frac{am - a\sqrt{m}}{1-m}.$$

$$x = -\frac{am + a\sqrt{m}}{1-m}.$$

Per quanto semplici sieno quest' espressioni, esse per altro non sono ancor quelle del numero precedente; e parimente, se si cerca di verificarle per il caso di $m = 1$, esse diventano

$$x = \frac{-a+a}{1-1} = \frac{0}{0},$$

$$x = \frac{-a-a}{1-1} = \frac{-2a}{0}.$$

Si trova nella seconda il simbolo dell'infinito come precedentemente, ma la prima presenta questa forma indeterminata $\frac{0}{0}$, della quale n' abbiamo di già veduti degli esempî nei numeri 69 e 70; e prima di proferire sopra il suo valore, torna a proposito esaminare se essa cada nel caso del num.° 70, vale a dire, se sia un fattor comune al numeratore, e al denominatore, che vada a zero per la supposizione di $m = 1$.

L'espressione $\frac{-am + a\sqrt{m}}{1-m}$

riducesi ad $\frac{a(-m+\sqrt{m})}{1-m} = \frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m}$.

Vediamo di già che il numeratore non diviene zero se non quando diventa zero il fattore $\sqrt{m} - m$; bisogna dunque cercare se quest' ultimo avesse qualche fattor comune col denominatore $1 - m$. Per evitar l' imbarazzo, che potrebbe cagionare il segno radicale, $\sqrt{m} = n$; e concludo, prendendone i quadrati, $m = n^2$: ciò cangia le quantità

$\sqrt{m} - m$, e $1 - m$

in $n - n^2$, e $1 - n^2$;

ora $n - n^2 = n(1-n)$, e $1 - n^2 = (1-n)(1+n)$ (34); rimettendo per n il suo valore $\sqrt{m}$, si ha

$$\sqrt{m} - m = (1-\sqrt{m})\sqrt{m},$$
$$1 - m = (1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m}),$$

ed in conseguenza

$$\frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m} = \frac{a(1-\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})} = \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}};$$

resultato simile a quello del n.° 119.

Si riduce parimente il secondo valore di x osservando che

$$\frac{-a\sqrt{m}-am}{1-m} = \frac{-a(1+\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})} = \frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}$$

come nel n.° 119 (*).

Non è difficile vedere che io avrei potuto evitare i radicali nei calcoli precedenti rappresentando per m^2 il rapporto de' quadrati delle due parti del numero proposto; allora m ne sarebbe stata la radice quadrata, che può sempre riguardarsi come cognita allorchè il suo quadrato è dato: ma non sarebbesi a prima vista conosciuto il fine di un simile cangiamento di dati, di cui gli Algebristi fanno spesso uso per simplificare i calcoli; ecco perchè invito il Lettore a ricominciare la soluzione del problema ponendo m^2 in vece di m.

(*) *L'esempio, che ho adesso trattato sì a lungo corrisponde a un problema risoluto da Clairaut nella sua Algebra, l'enunciato del quale è il seguente:* Trovare sopra una retta, la quale unisca due lumi qualunque, il punto che è ugualmente illuminato da questi due lumi. *Ho spogliato questo problema delle circostanze fisiche, le quali sono estranee all'oggetto di quest' Opera, e non posson che distrarre l' attenzione, che esigono le circostanze algebriche, notabilissime per loro stesse, e che, per questa ragione, io ho sviluppate più di quello, che non avea fatto Clairaut.*

Dell'estrazione della radice quadrata dalle quantità algebriche.

121. Il Problema precedente basta per indicare come bisogna condursi nella risoluzione dei Problemi letterali, ed ha presentata una trasformazione, che importa di ben osservare, cioè, quella di

$$\sqrt{a^2m} \text{ in } a\sqrt{m} \quad (pag.\ 187);$$

poichè pel suo mezzo si posson ridurre al minor numero possibile i fattori contenuti sotto il radicale, e simplificar semprepiù l' estrazione della radice, che resta da farsi.

Questa trasformazione consiste, come lo abbiamo veduto nell' esempio citato, in *prender separatamente la radice di tutti i fattori, i quali sieno quadrati, e scriver queste radici fuori del segno come moltiplicatori di questo radicale, sotto del quale si lasciano tali, come essi sono, i fattori, che non sieno quadrati.*

Questa regola suppone primieramente che si sappia conoscere se una quantità algebrica è un quadrato, e in tal caso estrarne la radice; e perciò fa di mestieri distinguere le quantità monomie dalle polinomie.

122. Resulta evidentemente dalla regola degli esponenti nella moltiplicazione, che *la seconda potenza di una quantità qualunque ha un esponente doppio di quello di questa quantità.*

Si ha, per esempio,

$$a^1\times a^1=a^2,\ a^2\times a^2=a^4,\ a^3\times a^3=a^6, \text{ ec.}$$

Segue da ciò che *ogni fattore, che è un quadrato, deve avere un esponente pari, e che se ne ottien la radice di questo fattore scrivendo la sua lettera con un esponente eguale alla metà dell' esponente primitivo.*

Così abbiamo

$$\sqrt{a^2}=a^1, \text{ ovvero } a,\ \sqrt{a^4}=a^2,\ \sqrt{a^6}=a^3, \text{ ec.}$$

A riguardo de' fattori numerici, l' estrazione delle loro radici si effettua, se ha luogo, colle regole precedentemente insegnate.

Dietro a queste osservazioni, i fattori a^6, b^4, c^2 dell' espressione

$$\sqrt{64a^6b^4c^2}$$

sono quadrati; il numero 64 è il quadrato di 8; dunque *l' espressione proposta essendo il prodotto di fattori quadrati, avrà per radice il prodotto delle radici di ciascuno di questi fattori* (121); ed in conseguenza

$$\sqrt{64a^6b^4c^2}=8a^3b^2c.$$

123. Allorchè questa circostanza non ha luogo, *bisogna cercare di decomporre il prodotto proposto in due altri, uno dei quali non contenga che i fattori quadrati, e l'altro i fattori non quadrati*; e per questo è neccessario considerare a parte ciascuno de' suoi fattori.

Sia, per esempio,

$$\sqrt{72a^4b^3c^5}.$$

Si riconosce facilmente che fra i divisori del numero 72 vi son dei quadrati perfetti, cioè 4, 9, e 36; e prendendone il maggiore, si ha

$$72=36\times 2.$$

Il fattore a^4 essendo un quadrato, si pone da parte; passando in seguito al fattore b^3, che non lo è, poichè il numero 3 è impari, si osserva che questo fattore può decomporsi in due altri b^2, e b, di cui il primo è un quadrato, e che si ha

$$b^3=b^2.b;$$

vedesi ancora che

$$c^5=c^4.c;$$

sarebbe lo stesso di qualunque lettera, che avesse un esponente impari. Tutte queste decomposizioni danno

$$72a^4b^3c^5=36.2a^4b^2.bc^4.c;$$

e riunendo i fattori quadrati si ottiene

$$36a^4b^2c^4\times 2bc.$$

Finalmente, prendendo la radice del primo prodotto, e indicando quella del secondo, si ha

$$\sqrt{72a^4b^3c^5}=6a^2bc^2\sqrt{2bc}.$$

Ecco ancora alcuni esempî di riduzioni consimili, preceduti dai calcoli, i quali le pongono in evidenza

$$\sqrt{\frac{a^3}{b}}=\sqrt{a^2\frac{a}{b}}=a\sqrt{\frac{a}{b}}=$$

$$a\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{a}{b}\sqrt{ab};$$

$$6\sqrt{\frac{75}{98}ab^2}=6\sqrt{\frac{25.3ab^2}{49.2}}=6\sqrt{\frac{25b^2.3a}{49.2}}=$$

$$\frac{6.5}{7}b\sqrt{\frac{3a}{2}}=\frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}};$$

$$\sqrt{\frac{a^2m^2}{n^2}+\frac{a^2m}{n}}=\sqrt{\frac{a^2m^2+a^2mn}{n^2}}=$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{n^2}(m^2+mn)}=\frac{a}{n}\sqrt{m^2+mn}.$$

Fa di mestieri osservare, per rapporto al primo, che si può far uscire dal radicale il denominatore delle frazioni algebriche, rendendolo un quadrato, secondo ciò che è stato detto nel n.° 104 per le frazioni numeriche.

124. Passo adesso all' estrazione della radice quadrata dei polinomî. È importante il ricordarsi, che nessun binomio è un quadrato perfetto, perchè ogni monomio alzato aquadrato non produce che un monomio, e il quadrato di un binomio contiene sempre tre parti (34).

Sarebbe un grave sbaglio prendere per $\sqrt{a^2+b^2}$ il binomio $a+b$, benchè a sia separatamente la radice di a^2, e b quella di b^2; poichè il quadrato di $a+b$; essendo $a^2+2ab+b^2$, contiene inoltre il termine $+2ab$, il qual non si trova nell' espressione a^2+b^2.

Sia dunque il trionomio

$$24a^2b^3c+16a^4c^2+9b^6;$$

affine di trovare in quest' espressione le tre parti componenti il quadrato di un binomio, io l' ordino per rapporto ad una delle sue lettere, per esempio, alla lettera a; si ottiene

$$16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^6.$$

Allora, qualunque sia la radice cercata, supponendola ordinata per rapporto alla medesima lettera a, il quadrato del suo primo termine deve necessariamente formare il primo termine $16a^4c^2$ della quantità proposta; il doppio prodotto del primo termine della radice pel secondo deve dare il secondo termine $24a^2b^3c$ della quantità proposta; e finalmente il quadrato dell' ultimo termine della radice debb' esser precisamente l' ultimo termine $9b^6$ della quantità proposta. Dietro a queste considerazioni, l' operazione disponesi come si vede qui appresso:

$$\begin{array}{l|l} 16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^6 & 4a^2c+3b^3 \text{ radice} \\ -16a^4c^2 & 8a^2c+3b^3 \\ \hline +24a^2b^3c+9b^6 & \\ -24a^2b^3c-9b^6 & \\ \hline 0 \quad 0. & \end{array}$$

Estraggo primieramente la radice quadrata dal primo termine $16a^4c^2$, ed il resultato $4a^2c$ (122) è il primo termine della radice, il quale si scrive a destra sulla medesima linea della quantità proposta.

Tolgo da questa quantità il quadrato $16a^4c^2$ del primo termine $4a^2c$ della radice, e facendo la riduzione, non restano che i due termini $24a^2b^3c + 9b^6$.

Il termine $24a^2b^3c$ essendo il doppio prodotto del primo termine della radice $4a^2c$ per il secondo, ottengo quest' ultimo dividendo $24a^2b^3c$ per $8a^2c$, doppio di $4a^2c$, e che si scrive al di sotto della radice; il quoziente $3b^3$ è il secondo termine della radice.

La radice è adesso determinata; ma bisogna, perchè dessa sia esatta, che il quadrato del secondo termine sia $9b^6$, ovvero che il doppio $8a^2c$ del primo termine della radice, aumentato dal secondo $3b^3$, e moltiplicato per questo, riproduca i due ultimi termini del quadrato (91); in conseguenza, allato di $8a^2c$ scrivo $+ 3b^3$; moltiplico $8a^2c + 3b^3$ per $3b^3$; il prodotto essendo tolto dai due ultimi termini della quantità proposta, non resta niente, e ne concludo che questa quantità è il quadrato di $4a^2c + 3b^3$.

È evidente che i medesimi ragionamenti, e i medesimi metodi possono applicarsi a tutte le quantità composte di tre termini.

125. Allorchè la quantità dalla quale si vuol' estrar la radice, ha più di tre termini, essa non è altrimenti il quadrato d' un binomio; ma supponendola quello d' un trinomio $m + n + p$, e rappresentando per l la somma $m + n$ dei suoi due primi termini, questo trinomio cangiandosi in $l + p$, il suo quadrato diviene

$$l^2 + 2lp + p^2,$$

ove il quadrato l^2 del binomio $m + n$ essendo sviluppato, produrrebbe i termini $m^2 + 2mn + n^2$. Così, quando avremo ordinata la quantità proposta, il primo termine sarà evidentemente il quadrato del primo termine della radice, e il secondo conterrà il doppio prodotto del primo termine della radice per il secondo della radice medesima: avremo dunque questo ultimo dividendo il secondo termine della quantità proposta per il doppio della radice del primo. Conoscendo allora i due primi termini della radice cercata, compiremo il quadrato di questi due termini, rappresentato qui per l^2, e togliendolo dalla quantità proposta, resterà

$$2lp + p^2;$$

quantità, che contiene il doppio prodotto di l, ovvero del primo binomio $m+n$ per il resto della radice, più il quadrato di questo resto, e fa veder che bisogna operare con questo binomio come abbiam fatto col primo termine m della radice.

Sia, per esempio, la quantità

$$64a^2bc+25a^2b^2-40a^3b+16a^4+64b^2c^2-80ab^2c\,;$$

io l'ordino per rapporto alla lettera a, e dispongo l'operazione come precedentemente,

$$\begin{array}{l|l}
16a^4-40a^3b+25a^2b^2-80ab^2c+64b^2c^2 & 4a^2-5ab+8bc \\
\qquad\qquad\quad +64a^2bc & \overline{8a^2-5ab} \\
-16a^4 & 8a^2-10ab+8bc \\
\hline
1.^{\circ}\text{ resto}-40a^3b+25a^2b^2-80ab^2c+64b^2c^2 & \\
\qquad\qquad\quad +64a^2bc & \\
\qquad +40a^3b-25a^2b^2 & \\
\hline
2.^{\circ}\text{ resto}\ldots\ldots\ldots +64a^2bc-80ab^2c+64b^2c^4 & \\
\qquad\qquad\quad -64a^2bc+80ab^2c-64b^2c^2 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Ciò fatto, estraggo la radice quadrata dal primo termine $16a^4$, ed ottengo $4a^2$ per il primo termine della radice cercata; ne formo il quadrato, che tolgo dalla quantità proposta.

Raddoppio il primo termine della radice, e scrivo al disotto il resultato $8a^2$, per cui divido il termine $-40a^3b$, col quale principia il primo resto; ottengo $-5ab$ per il secondo termine della radice; io lo scrivo in seguito di $8a^2$, moltiplico il tutto per questo secondo termine, e tolgo il resultato dal resto, sopra cui opero.

In questa maniera ho tolto dalla quantità proposta il quadrato del binomio $4a^2-5ab$; il secondo resto altro non contenendo che il doppio prodotto di questo binomio per il terzo termine della radice, e il quadrato di questo termine, raddoppio la quantità $4a^2-5ab$, il che dà

$$8a^2-10ab,$$

ch'io scrivo al disotto di $8a^2-5ab$, e che prendo per divisore del secondo resto: il primo termine del quoziente ch'è $8bc$, è il terzo termine della radice.

Lo scrivo pure allato di $8a^2-10ab$, e moltiplico il tutto per questo termine; tolgo i prodotti dal resto, sul quale opero, il quale si trova interamente distrutto: la quantità proposta è dunque il quadrato di

$$4a^2-5ab+8bc.$$

È facile adesso d' estender tanto lontano quanto vorremo l' operazione qui sopra, la quale è d' altronde perfettamente simile a quella, ch' è stata indicata pei numeri.

Della formazione delle potenze, e dell' estrazione delle loro radici.

126. L' operazione aritmetica, dalla quale dipende la risoluzione dell' equazioni di secondo grado, e per la quale si torna dal quadrato alla quantità, che l' ha formato, ovvero alla radice quadrata, non è che un caso particolare d' un altro più generale, il quale serve a *trovare un numero*, *di cui si conosca una potenza qualunque*. Si concepisce che quest' operazione, la quale conduce ad un resultato, che si esprime sempre per la parola *radice*, con aggiungervi l' indicazione del grado, essendo inversa di quella, che serve a trovar la potenza, non può esser dedotta che dall'esame delle circostanze di quest' ultima, nello stesso modo che succede per la divisione a riguardo della moltiplicazione, con le quali questo soggetto ha d' altronde dei rapporti, che ben presto si faranno conoscere.

È per mezzo della moltiplicazione che si perviene alle potenze de' numeri interi (24), ed è chiaro che quelle delle frazioni si formano alzando il loro numeratore, e il loro denominatore alla potenza proposta (96).

Reciprocamente la radice d'una frazione, di qualunque grado che sia, si ottiene prendendo quella del numeratore, e quella del denominatore.

L' uso de' simboli algebrici essendo comodissimo per esprimere tutto ciò, che dipende dalla composizione, e decomposizione delle quantità, si procede primieramente alla formazione delle potenze dell' espressioni algebriche, poichè, a riguardo di quelle dei numeri, ciò che abbiamo detto nel n.° 24 serve per ritrovarle.

Tavola delle 7 prime potenze dei numeri da 1. fino a 9

1.a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.a	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3.a	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4.a	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5.a	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6.a	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7.a	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969

Ho principalmente qui posta questa Tavola, affin di mostrare con qual rapidità si accrescono le potenze de' numeri, a misura ch'esse divengono più elevate; osservazione, ch'è importantissima per il seguito. Si vede infatti che la settima potenza di 2 è digià 128, e che quella di 9 ascende a 4782969.

Si concepisce facilmente da ciò che le potenze delle frazioni propriamente dette decrescono rapidissimamente; poichè le potenze del denominatore divengono di più in più grandi per rapporto a quelle del numeratore. La settima potenza di $\frac{1}{2}$, per esempio, sarebbe $\frac{1}{128}$, e quella di $\frac{1}{9}$ sarebbe solamente $\frac{1}{4782969}$.

127. Poichè in un prodotto ciascuna lettera ha per esponente la somma degli esponenti, ch'essa ha in ciascuno de'

suoi fattori (26), ne segue che *la potenza d'una quantità monomia si forma moltiplicando l'esponente di ciascun fattore per l'esponente di questa potenza.*

La terza potenza di a^2b^3c, per esempio, si otterrà moltiplicando gli esponenti 2, 3, e 1 delle lettere a, b, c per 3, esponente della potenza dimandata; avremo $a^6b^9c^3$: ed infatti questa potenza riducesi ad

$$a^2b^3c \times a^2b^3c \times a^2b^3c = a^{2.3}b^{3.3}c^{1.3}.$$

Se la quantità proposta avesse un coefficiente numerico, bisognerebbe alzare anche questo coefficiente alla potenza proposta; così la quarta potenza di $3ab^2c^5$ è

$$81a^4b^8c^{20},$$

perchè quella di 3 è 81.

128. A riguardo de' segni, dai quali possono essere affette le quantità monomie, bisogna osservare che *tutte le potenze, di cui l'esponente è pari, hanno il segno +, e che quelle, il cui esponente è impari, hanno il medesimo segno della quantità, che le ha formate.*

Infatti, le potenze d'un grado pari resultano dalla moltiplicazione d'un numero pari di fattori; e i segni −, combinati 2 a 2 nella moltiplicazione, danno sempre al prodotto il segno + (31). Al contrario, se il numero de' fattori è impari, il prodotto avrà il segno − quando i fattori ne saranno affetti, poichè esso resulterà dal prodotto di un numero pari di fattori, ed in conseguenza positivo, moltiplicato per un fattor negativo.

129. Per ritornare dalla potenza alla quantità, che l'ha formata, ovvero alla sua radice, non si dee far altro che rovesciar le regole date qui sopra; e vale a dire, *dividere l'esponente di ciascuna lettera per quello, che indica il grado della redice, che si vuole estrarre.*

Troveremo in questa maniera la *radice cubica*, ovvero *del terzo grado*, dell'espressione $a^6b^9c^3$, dividendo per 3 gli esponenti, 6, 9, e 3, il che darà

$$a^2b^3c$$

Allorchè l'espressione proposta ha un coefficiente numerico, bisogna prendere la radice ancora di questo, per formare il coefficiente della quantità letterale, che si ottiene col mezzo della regola precedente.

Se si dimandasse, per esempio, la radice quarta di $81a^4b^8c^{20}$, si vedrebbe, mediante la Tavola del n.° 126, che 81 è la quarta potenza di 3; e dividendo per 4 gli esponenti delle lettere, avrebbesi per resultato

$$3ab^2c^5.$$

Nel caso che la radice del coefficiente numerico non potesse trovarsi col mezzo della Tavola precitata, s'estrae la medesima coi metodi, che darò in appresso.

130. È evidente che l'estrazione delle radici non può effettuarsi sulla parte letterale de' monomî se non che quando ciascuno degli esponenti è divisibile per quello della radice; nel caso contrario non possiam che indicare l'operazione aritmetica, che bisognerà fare allorchè sostituiremo de' numeri alle lettere.

Ci serviamo anche per quest' oggetto del segno $\sqrt{}$; ma, per denotare il grado della radice, si pone l'esponente come si vede qui sotto, nell' espressioni

$$\sqrt[3]{a}, \qquad \sqrt[5]{a^2},$$

di cui la prima rappresenta la radice cubica, o del terzo grado, di a, e la seconda la radice quinta di a^2,

L' espressioni affette dal segno $\sqrt{}$, di qualunque grado esse sieno, possono spesso simplificarsi facendo attenzione che, secondo il n.° 127, *una potenza qualunque d'un prodotto è formata dal prodotto della medesima potenza di ciascuno dei suoi fattori*, e che in conseguenza, *la radice qualunque d'un prodotto è formata dal prodotto delle radici del medesimo grado di ciascun dei suoi fattori*. Resulta da quest' ultimo principio che *se la quantità supposta al radicale ha dei fattori, i quali sieno potenze esatte del medesimo grado che il radicale, potremo prendere separatamente le radici di questi fattori, e moltiplicare il loro prodotto per la radice indicata degli altri fattori*.

Sia per esempio,

$$\sqrt[5]{96a^5b^7c^{11}}.$$

si vede che

che $96 = 32 \times 3 = 2^5.3$,

che a^5 è la quinta potenza di a,

che $b^7 = b^5.b^2$,

$c^{11} = c^{10}.c$;

abbiamo per conseguenza

$$96a^5b^7c^{11} = 2^5a^5b^5c^{10} \times 3b^2c.$$

Il primo fattore avendo per radice quinta la quantità $2abc^2$, s' ottiene

$$\sqrt[5]{96a^5b^7c^{11}} = 2abc^2\sqrt[5]{3b^2c}.$$

131. Qualunque potenza pari dovendo avere il segno $+$ (128), nessuna quantità affetta dal segno $-$ può essere una potenza di grado pari, e non ha radice di questo grado. Se-

gue da ciò che *qualunque radicale d'un grado pari, comprendente una quantità negativa, è un'espressione immaginaria:*

$$\sqrt[4]{-a}, \qquad \sqrt[6]{-a^4}, \quad b+\sqrt[8]{-ab^7}$$

sono dell' espressioni immaginarie.

Non si possono in conseguenza assegnare, nè esattamente, nè per approssimazione, pei gradi di cui l' esponente è pari, se non che le radici delle quantità positive; e *queste radici posson essere affette indifferentemente dal segno* $+$, *o dal segno* $-$; perchè nell' uno e l'altro caso esse riproducon egualmente la quantità proposta col segno $+$, e s' ignora a quale dei due esse appartengono.

Non è lo stesso pei gradi impari, nei quali le potenze hanno lo stesso segno che le loro radici (128): *dobbiamo dare alle radici di questi gradi il segno, dal quale la potenza è affetta*; e in questo caso non vi sono immaginarî.

132. È a proposito l' osservare che l' applicazione della regola data nel n.° 129 per l' estrazione delle radici de' monomî col mezzo degli esponenti de' loro fattori conduce naturalmente a indicar con dei segni più comodi per il calcolo che il segno $\sqrt{\ }$ le radici, le quali non possono algebricamente ottenersi.

Allorchè dimandasi, per esempio, la radice terza di a^5, bisogna, secondo la regola citata, dividere l' esponente 5 per 3; ma la divisione non potendo effettuarsi, conduce ad un numero frazionario $\frac{5}{3}$; e la forma, che prende allora l' esponente del resultato, indica che l'estrazione non è possibile nello stato attuale della quantità proposta: dobbiamo dunque riguardare le due espressioni

$$\sqrt[3]{a^5}, \qquad \text{e} \qquad a^{\frac{5}{3}}$$

come equivalenti.

L' ultima ha nulladimeno sulla prima il vantaggio di condur subito alla simplificazione, di cui la quantità $\sqrt[3]{a^5}$ è suscettibile; poichè se s' estrae l' intero contenuto nella frazione $\frac{5}{3}$ avremo $1+\frac{2}{3}$, e riguardando questa somma come l' esponente d' un prodotto (25), si riconosce che la quantità

$$a^{\frac{5}{3}} = a^{1+\frac{2}{3}} = a^1 \times a^{\frac{2}{3}}$$

è composta di due fattori, di cui il primo è a, e l' altro riducesi a $\sqrt[3]{a^2}$.

Lo stesso concluderebbesi dall' espressione $\sqrt[3]{a^5}$, per mez-

zo del n.° 130, ma l' esponente frazionario ci conduce a ciò immediatamente: avremo d' altronde occasione di riconoscere in altre operazioni i vantaggi dell' espressioni frazionarie, e di giustificarne l' uso.

Basta per adesso osservare che la divisione degli esponenti, nel caso ove dessa possa effettuarsi, corrisponde all'estrazione delle radici; si dee, allorchè ella è indicata, risguardarla come il simbolo della medesima operazione, e concluderne che l' espressioni

$$\sqrt[n]{a^m}, \quad \text{e} \quad a^{\frac{m}{n}}$$

sono equivalenti

È qui da notarsi che anco le convenzioni stabilite sulla maniera d' esprimere le potenze, conducono, per analogia, e per maggior estenzione, a dei simboli particolari, come nel n.° 37 siamo pervenuti all' espressione $a^0 = 1$.

133. Osservo in quest' occasione che la regola degli esponenti, relativa alla divisione (36), essendo applicata conformemente a quella dei segni, relativa alla sottrazione (20), conduce pure a nuove espressioni per una certa classe di frazioni.

Infatti, abbiamo per mezzo di queste regole

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

ma, se l' esponente n del denominatore sorpassa l' esponente m, del numeratore, l' esponente della lettera a nel secondo membro sarà negativo.

Se, per esempie, $m = 2$, $n = 3$, avremo

$$\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1};$$

ma d' altronde, simplificando la frazione $\frac{a^2}{a^3}$, si trova $\frac{1}{a}$: l' espressioni

$$\frac{1}{a}, \text{ e } a^{-1}$$

son dunque equivalenti.

In generale, abbiamo per la regola degli esponenti

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = a^{m-m-n} = a^{-n},$$

e d' altronde

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{1}{a^n};$$

resulta da ciò che l' espressioni

$$\frac{1}{a^n}, \text{ e } a^{-n}$$

sono equivalenti.

Infatti, il segno —, che precede l' esponente n, essendo preso nel senso del n.° 62, fa vedere che l'esponente proposto deriva da una frazione, di cui il denominatore contiene n fattori a di più che il numeratore, come lo esprime ancora $\frac{1}{a^n}$; possiamo dunque, allorchè s'incontra una qualunque di queste espressioni, sostituirvi l' altra.

Dietro a questa osservazione, la quantità $\frac{a^2b^5}{c^2d^3}$, considerata come

$$a^2b^5 \times \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{d^3},$$

può esser posta sotto la forma

$$a^2\,b^5\,c^{-2}d^{-3},$$

vale a dire, *che possiam far passare nel numeratore tutti i fattori del denominatore, dando ai loro esponenti il segno—.*

Reciprocamente, *allorchè una quantità contiene dei fattori affetti da esponenti negativi, si pongono essi nel denominatore, dando il segno + ai loro esponenti*; di maniera che la quantità

$$a^2b^5\,c^{-2}d^{-3}$$

ritorna

$$\frac{a^2b^5}{c^2d^3}.$$

Della formazione delle potenze delle quantità complesse:

134. Comincerò ad osservare che le potenze delle quantità complesse s'indicano ponendo queste quantità dentro parentesi, la quale si rende affetta dall'esponente della potenza. L'espressione

$$(4a^2-2ab+5b^2)^3,$$

per esempio, denota la terza potenza della quantità $4a^2-2ab+5b^2$. S' esprimerebbe pure questa potenza come qui sotto

$$\overline{4a^2-2ab+5b^2}^{\,3}.$$

135. Le quantità binomie son le più semplici dopo le monomie; tuttavia, se si volessero formar le potenze per mezzo

delle moltiplicazioni successive, non s' arriverebbe in questa maniera che a dei resultati particolari per ciascuna potenza, come lo sono, per la seconda e la terza, quelli che ho fatto osservare nel n.° 34: formerebbesi questa Tavola

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3,$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4, \text{ ec.};$$

ma non si potrebbe comprendere facilmente la legge dei coefficienti numerici di questi resultati. Riflettendo all' andamento della moltiplicazione, riconosceremo che i coefficienti numerici nascono dalle riduzioni, che apporta l' eguaglianza dei fattori, i quali formano una potenza, e che, se impediremo queste riduzioni, renderemo la composizione de' prodotti più manifesta.

Per ottenere questo vantaggio, serve dare a tutti i binomî, che si moltiplicano, dei secondi termini differenti; prendere per esempio,

$$x+a, \quad x+b, \quad x+c, \quad x+d, \text{ ec.}$$

Effettuando le moltiplicazioni, che vo ad indicare, e ponendo in nna stessa colonna i termini affetti da una medesima poteuza di x, è facile trovare che

$$\begin{array}{rllll}
(x+a)(x+b) = x^2 & +ax & +ab & & \\
 & +bx & & & \\
(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 & +ax^2 & +abx & +abc, & \\
 & +bx^2 & +acx & & \\
 & +cx^2 & +bcx & & \\
(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 & +ax^3 & +abx^2 & +abcx & +abcd \\
 & +bx^3 & +acx^2 & +abdx & \\
 & +cx^3 & +adx^2 & +acdx & \\
 & +dx^3 & +bcx^2 & +bcdx & \\
 & & +bdx^2 & & \\
 & & +cdx^2 & &
\end{array}$$

Senza spinger più avanti questi prodotti, possiamo già riconoscere la legge della loro formazione.

Immaginando che tutti i termini affetti dalla stessa potenza di x, e posti nella colonna medesima, non ne formin che un solo, come, per esempio,

$$ax^3 + bx^3 + cx^3 + dx^3 = (a+b+c+d)x^3,$$

e così degli altri,

1.° *Si trova in ciascun prodotto un termine di più che non vi sono unità nel numero de' suoi fattori;*

2.° *L'esponente di* x *nel primo termine è lo stesso che il numero dei fattori, e va diminuendo dell'unità da un termine a quello, che lo segue;*

3.° *La più alta potenza di* x *non ha per coefficiente che l'unità; quella, che la segue, ovvero che ha un' unità di meno nel suo esponente, è moltiplicata per la somma de' secondi termini dei binomî; quella, che ha due unità di meno nel suo esponente, lo è per la somma dei diversi prodotti, che si ottengono moltiplicando due a due i secondi termini de' binomî; quella, che ha tre unità di meno nel suo esponente, lo è per la somma de' diversi prodotti, che ottengonsi moltiplicando tre a tre i secondi termini de' binomî; e così di seguito: finalmente nell' ultimo termine l'esponente di* x *essendo considerato come eguale a zero* (37), *si trova composto del primo diminuito di tante unità quante ve ne sono nel numero de' fattori; e questo termine contiene il prodotto di tutti i secondi termini de' binomî.*

È facil vedere che la forma di questi prodotti deve restar soggetta alla medesime leggi, qualunque, siasi il numero de' fattori. Frattanto possiamo anco averne una prova diversa dall' analogia.

136. In primo luogo è evidente che qualunque prodotto di questa specie deve contener le potenze successive di x cominciando da quella, il cui esponente è eguale al numero de' fattori, che abbiamo moltiplicati, fino a quella, il cui esponente è zero. Per indicare generalmente il resultato, esprimeremo questo numero colla lettera m; le potenze successive di x saranno indicate da

$$x^m, \quad x^{m-1} \quad x^{m-2}, \text{ ec};$$

porremo le lettere A, B, C, ... Y, per le quantità, che debbono, moltiplicarle, a partirsi da x^{m-1}; ma il numero de' termini, il quale dipende dai valori particolari dati all'esponente m, restando indeterminato fino a che questo esponente non è stabilito, non si possono scriver che i primi, e gli ultimi dell' espressione, e s' indicano per una serie di punti i termini intermedî, i quali son sottintesi.

In tal modo la formula

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \; . \; . \; . \; . \; . + Y,$$

rappresenta il prodotto di un numero qualunque m di fattori $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, ec. Se lo moltiplichiamo per un nuovo fattore $x+l$, otterremo

$$\left.\begin{array}{l} x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \; . \; . \; . \\ \quad + lx^m + lAx^{m-1} + lBx^{m-2} \; . \; . \; . + lY \end{array}\right\}.$$

È evidente 1.° che se A è la somma degli m secondi termini a, b, c, d, ec., $A+l$, sarà quella di $m+1$ secondi termini a, b, c, d, ec. l, e che in conseguenza la composizione assegnata a questo coefficiente sarà vera per il prodotto del grado $m+1$, se dessa è vera per quello del grado m.

2.° Se B è la somma dei prodotti di m quantità a, b, c, d, ec., prese due a due, $B+lA$ esprimerà quella dei prodotti di $m+1$ quantità, a, b, c, d, ec., l, prese pure due a due: poichè A essendo la somma delle prime, lA sarà quella dei loro prodotti per la nuova quantità introdotta l: dunque la composizione assegnata sarà vera per il grado $m+1$, se dessa lo è per il grado m.

3.° Se C è la somma dei prodotti di m quantità a, b, c, d ec., prese tre a tre, $C+lB$ sarà quella de' prodotti di $m+1$ quantità a, b, c, d, ec., l, prese pure tre a tre; poichè lB, secondo ciò, che precede, esprimerà la somma de' prodotti delle prime, prese due a due, moltiplicati per la nuova quantità introdotta l: dunque la composizione assegnata sarà vera per il grado $m+1$, se dessa ha luogo per il grado m.

Si vede che questa maniera di ragionare s'estende a tutti i termini, e che l' ultimo lY sarà il prodotto degli $m+1$ secondi termini.

Le osservazioni enunciate nel num.° 135 essendo vere rispetto al quarto grado, per esempio, lo saranno, secondo ciò che abbiam veduto, per il quinto, per il sesto; ed elevandosi così di grado in grado, esse saranno dimostrate in generale.

Segue da ciò che il prodotto di un numero qualunque di fattori binomî $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, ec. essendo rappresentato da

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\text{ ec.},$$

A sarà sempre la somma delle m lettere a, b, c, ec., B quella dei prodotti di queste quantità prese due a due, C quella dei prodotti di queste quantità prese tre a tre, e così di seguito

Per abbracciar la legge di questa espressione in un sol termine, io ne considero uno situato in un posto indeterminato, e che per questa ragione, lo rappresenterò per Nx^{m-n}.

Questo termine sarà il secondo, se faremo $n=1$, il terzo, se faremo $n=2$; l' undecimo, se faremo $n=10$, ec. Nel primo caso la lettera N sarà la somma delle m lettere a, b, c, ec.; nel secondo quella dei loro prodotti due a due; nel terzo quella dei loro prodotti tre a tre; ed in generale quella dei loro prodotti n a n.

137. Per cangiare i prodotti

$$(x+a)(x+b), (x+a)(x+b)(x+c),$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d), \text{ ec.}$$

nelle potenze di $x+a$, cioè in

$$(x+a)^2, \quad (x+a)^3, \quad (x+a)^4, \quad \text{ec.}$$

serve fare negli sviluppi di questi prodotti

$$a=b, \quad a=b=c, \quad a=b=c=d, \quad \text{ec.}$$

Tutte le quantità le quali moltiplicano una medesima potenza di x, diverranno allora eguali tra loro; così il coefficiente del secondo termine, il quale, nel prodotto

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) \text{ è } a+b+c+d,$$

si cangerà in $4a$; quello del terzo termine, nel medesimo prodotto essendo.

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd,$$

diverrà $6a^2$; e da ciò è facil conoscere che i coefficienti delle diverse potenze di x si cangeranno in una sola potenza di a, ripetuta tante volte quanti sono i termini, ed espressa pel numero dei fattori, che contengono questi termini. Così il coefficiente N, che moltiplica la potenza x^{m-n}, nello sviluppo generale sarà la potenza n di a ovvero a^n, ripetuta tante volte quanti sono i differenti prodotti, i quali posson formarsi prendendo in tutte le maniere possibili un numero n di lettere sopra un numero m; dalla ricerca dunque del numero di questi prodotti dipende quella del coefficiente del termine affetto da x^{m-n}.

138. Per arrivare a scoprir il numero, di cui si tratta, bisogna primieramente distinguere le disposizioni, o *permutazioni* dai prodotti, o *combinazioni*. Due lettere a, e b non danno che un prodotto, ma son suscettibili di due disposizioni ab, e ba; tre lettere a, b, c, che non danno che un prodotto, son suscettibili di sei disposizioni (88); e così di seguito.

Affine di fissare le idee, supposgo che vi sieno in tutto 9 lettere,

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i,$$

e che si tratti di disporle 7 a 7; è evidente che scegliendo a piacimento una disposizione di sei di queste lettere, *abcdef* tre lettere rimanenti g, h, i, e si avranno in questa maniera tre disposizioni di 7 lettere, cioè

$$abcdefg, \quad abcdefh, \quad abcdefi.$$

Ciò, che abbiam detto sopra una disposizione particolare di

sei lettere, converrà egualmente a tutte; e ne dobbiamo concludere che ciascuna disposizione di sei lettere ne darà tre di sette lettere, e vale a dire, tante quante son le lettere, che restano, le quali non vi sono impiegate. Dunque, se il numero delle disposizioni di sei lettere è rappresentato per P, avremo quello delle disposizioni di sette lettere moltiplicando P per 3 ovvero 9—6. Rimpiazzando i numeri 9, e 7 per m, e n, e riguardando P come il numero delle disposizioni, di cui son suscettibili m lettere prese in numero $n-1$, il ragionamento non cangerà, ed avremo, ancora per il numero delle disposizioni composte di n lettere,

$$P[m-(n-1)], \text{ ovvero } P(m-n+1).$$

Questa formula contiene implicitamente tutti i casi particolari. Affine di dedurre, per esempio, il numero delle disposizioni di m lettere, prese due a due, faremo $n=2$, il che darà

$$n-1=1,$$

ed avremo

$$P=m,$$

poichè P eguaglierà allora il numero delle lettere prese una ad una: resulterà dunque da ciò

$$m(m-2+1), \text{ ovvero } m(m-1).$$

Ponendo in seguito

$$P=m(m-1), \text{ e } n=3,$$

troveremo pel numero delle disposizioni, di cui son suscettibili m lettere prese 3 a 3,

$$m(m-1)(m-3+1)=m(m-1)(m-2),$$

e facendo

$$P=m(m-1)(m-2) \text{ e } n=4$$

otterremo

$$m(m-1)(m-2)(m-3)$$

per il numero delle disposizioni 4 a 4. Calcoleremo dunque in tal modo successivamente l'espressioni del numero delle disposizioni formate da tante lettere quante si vorranno (*).

(*) *In queste disposizioni si escludono le repliche della stessa lettera, perchè la ricerca, di cui ci occupiamo, non l'ammette; ma la Teoria delle permutazioni, e delle combinazioni servendo di base al Calcolo delle probabilità, presenta de' Problemi, nei quali questa circostanza può aver luogo. Per calcolarne l'effetto, nell'esempio, del quale mi sono servito,*

139. Per passare adesso dal numero delle disposizioni di n lettere a quello dei prodotti differenti, fa di mestieri conoscere il numero delle disposizioni, di cui è suscettibile un medesimo prodotto. Per questo, osserveremo che, se in una qualunque di queste disposizioni si fissa una delle lettere nel primo posto, potremo fare tra tutte l'altre tante permutazioni quante ne comporta un prodotto di $n-1$ lettere. Prendo, per esempio, il prodotto $abcdefg$, composto di 7 lettere; si può, lasciando a nel primo posto, scrivere questo prodotto in tante maniera quante le disposizioni, che ammette un prodotto di sei lettere $bcdefg$; ma ciascuna lettera del prodotto proposto può esser successivamente collocata nel primo posto; così, chiamando Q il numero delle disposizioni, di cui è suscettibile un prodotto di sei lettere, avremo $Q \times 7$ per quello delle disposizioni d'un prodotto composto di 7 lettere. Segue da ciò che, se Q denota il numero delle disposizioni, che può somministrare un prodotto di $n-1$ lettere, Qn denoterà il numero delle disposizioni d'un prodotto di n lettere.

Tutti i casi particolari si deducono senza pena da questa formula; poichè, facendo $n=2$, e osservando che, quando non vi è che una sola lettera, $Q=1$, viene $1 \times 2 = 2$ per il numero delle disposizioni d'un prodotto di due lettere; prendendo in seguito $Q = 1 \times 2$, e $n = 3$, avremo $1 \times 2 \times 3 = 6$ per il numero delle disposizioni d'un prodotto di tre lettere; facendo ancora $Q = 1 \times 2 \times 3$, e $n = 4$, ne resulterà $1 \times 2 \times 3 \times 4$, ovvero 24 disposizioni possibili in un prodotto di 4 lettere; e così di seguito.

140. Essendo ben inteso ciò, che precede, è facile vedere che dividendo il numero totale delle disposizioni di n lettere, somministrato dalle m lettere proposte, per il numero delle disposizioni, di cui un medesimo prodotto è suscettibile, avre-

---

basterà d'osservare che si possono scrivere indifferentemente ciascuna delle nove lettere a, b, c, d, e, f, g, h, i, *in seguito del prodotto di 6 lettere* abcdef. *Chiamando dunque* P *il numero delle disposizioni di questa specie, avremo* $P \times 9$ *per il numero delle disposizioni di 7 lettere. Per la stessa ragione, se* P *denota il numero delle disposizioni di* m *lettere prese* $n-1$ *a* $n-1$, *quello delle disposizioni* n *a* n *sarà* Pm.

Ciò posto, il numero delle disposizioni di m *lettere prese* 1 *a* 1 *essendo evidentemente* m, *quello delle disposizioni* 2 *a* 2 *sarà* $m \times m$, *ovvero* m^2; *quello delle disposizioni* 3 *a* 3 *sarà* $m \times m \times m$, *ovvero* m^3; *e finalmente* m^n *esprimerà il numero delle disposizioni* n *a* n.

mo per quoziente il numero dei prodotti differenti, che si posson formare prendendo in tutte le maniere possibili n fattori fra queste m lettere. Detto numero sarà dunque espresso da $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$ (*); e secondo ciò, che abbiam veduto nel numero 137, $\frac{P(m-n+1)}{Qn} a^n x^{m-n}$ sarà il termine affetto da x^{m-n} nello sviluppo di $(x+a)^m$.

È evidente che il termine, che precede quest'ultimo, sarà espresso da $\frac{P}{Q} a^{n-1} x^{m-n+1}$; poichè, risalendo verso il primo termine, l'esponente di x aumenta d'una unità, e quello di a diminuisce d'altrettanto; di più P, e Q son le quantità relative al numero $n-1$.

141. Se si fa $\frac{P}{Q} = M$, i due termini consecutivi indicati qui sopra diverranno

$$Ma^{n-1}x^{m-n+1}, \text{ e } M\ \frac{(m-n+1)}{n} a^n x^{m-n};$$

resultati, che fan vedere come ciascun termine dello sviluppo di $(x+a)^m$ si forma dal termine, che lo precede.

Partendo dal primo termine, che è x^m, si arriva al secondo facendo $n=1$: abbiamo $M=1$, poichè x^m non ha per coefficiente che l'unità, e ne resulta $\frac{1 \times m}{1} ax^{m-1}$, ovvero

---

(*) *È a proposito l'avvertire che, facendo successivamente*

$$n=2, \quad n=3, \quad n=4, \text{ ec.},$$

la formula $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$ *diviene*

$$\frac{m(m-1)}{1.2}, \quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}, \quad \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}, \text{e.};$$

numeri, i quali esprimono respettivamente quante combinazioni possono farsi con un numero qualunque m *di cose, prendendole* due a due, *ovvero* tre a tre, *oppure* quattro a quattro *ec.*

$\frac{m}{1} ax^{m-1}$. Per passare al terzo termine, si fa $M=\frac{m}{1}$, e $n=2$, il che dà $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2x^{m-2}$. Il quarto si ottiene per la supposizione di $M=\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$, e $n=3$, ciò conduce a $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3}$; e così in seguito; lo che produce la formula

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \text{ec.},$$

la quale si può convertire in questa regola:

Per passar da un termine a quel che lo segue, moltiplicate il coefficiente numerico per l' esponente di x *nel primo; dividete per il numero, che indica il posto di questo termine; aumentate d' una unità l' esponente di* a, *e diminuite d' altrettanto quello di* x.

Benchè non si possa fissare il numero dei termini di questa formula se non che assegnando un valore particolare a m, non dee frattanto restare alcun dubbio sulla legge, che seguono i termini della formula per quanto si suppongano lontani dal primo; e si vede che

$$\frac{m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} a^n x^{m-n}$$

esprime il termine, il quale ne ha n, che lo precedono.

Quest' ultima formula si chiama il *termine generale* della serie

$$x^m + \frac{m}{1} ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \text{ec.};$$

perchè, facendo successivamente

$$n=1,\ n=2,\ n=3,\ \text{ec.},$$

essa dà tutti i termini di questa serie.

142. Applichiamo adesso la regola del numero precedente alla formazione dello sviluppo di $(x+a)^5$; il primo termine essendo

$$x^5, \text{ ovvero } a^0x^5 \ (37),$$

il secondo sarà

$$\frac{5}{1}a^1x^4, \text{ ovvero } 5ax^4;$$

il terzo

$$\frac{5\times4}{2}a^2x^3 \text{ oppure } 10a^2x^3;$$

il quarto

$$\frac{10\times3}{3}a^3x^2, \text{ ovvero } 10a^3x^2;$$

il quinto

$$\frac{10\times2}{4}a^4x, \text{ ovvero } 5a^4x;$$

il sesto

$$\frac{5\times1}{5}a^5x^0, \text{ ovvero } a^5.$$

Qui termina lo sviluppo, perchè a fine di passare al termine seguente, bisognerebbe moltiplicare per l'esponente di x del sesto, e questo esponente è zero.

Questo è ciò che viene mostrato anche dalla formula; poichè il settimo termine avendo per coefficiente numerico

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6}$$

contiene nel caso attuale il fattore $m-5$, il quale diviene $5-5$, ovvero 0, e questo medesimo fattore entrando nei termini, che seguono, gli rende tutti nulli.

E riunendo i termini, che ho ottenuti qui sopra, viene

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

143. Si dedurrebbe in generale dalla formula del numero 141 lo sviluppo della potenza qualunque d'un qualsisia binomio. Se s'avesse, per esempio, da formar la sesta potenza di $2x^3-5a^3$, servirebbe sostituire nella formula alle potenze di x, e di a quelle di $2x^3$, e $-5a^3$ respettivamente; poichè se si facesse

$$2x^3 = x', \text{ e } 5a^3 = a',$$

avrebbesi

$$(2x^3 - 5a^3)^6 = (x' + a')^6 =$$
$$x'^6 + 6a'x'^5 + 15a'^2x'^4 + 20a'^3x'^3 + 15a'^4x'^2 + 6a'^5x' + a'^6 \quad (141),$$

e resterebbe da sostituire per x', e per a' le quantità, che denotano queste lettere. Si troverebbe

$$(2x^3)^6 + 6(-5a^3)(2x^3)^5 + 15(-5a^3)^2(2x^3)^4$$
$$+ 20(-5a^3)^3(2x^3)^3 + 15(-5a^3)^4(2x^3)^2$$
$$+ 6(-5a^3)^5(2x^3) + (-5a^3)^6$$

ovvero
$$64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12}$$
$$- 20000a^9x^9 + 37500a^{12}x^6$$
$$- 37500a^{15}x^3 + 15625a^{18}.$$

I termini di questo sviluppo sono alternativamente positivi, e negativi, ed è visibile che succederà sempre lo stesso allorchè il secondo termine del binomio proposto avrà il segno —.

144. Si prepara la formula del num.° 141 in una maniera, che ne facilita l'applicazione nei casi analoghi al precedente. Osservando che

$$x^{m-1} = \frac{x^m}{x},\quad x^{m-2} = \frac{x^m}{x^2},\quad x^{m-3} = \frac{x^m}{x^3},\ \text{ec.},$$

essa può scriversi nel modo seguente,

$$x^m + \frac{m}{1}\frac{a}{x}x^m + \frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}\frac{a^2}{x^2}x^m + \text{ec.},$$

la quale riducesi a

$$x^m \left\{ 1 + \frac{m}{1}\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\frac{a^3}{x^3} + \text{ec.} \right\},$$

isolando il fattore comune x^m. Per calcolare col mezzo di questa formula; bisogna *formare la serie de' numeri*

$$\frac{m}{1},\quad \frac{m-1}{2},\quad \frac{m-2}{3},\quad \frac{m-3}{4},\ \text{ec.}$$

moltiplicar primieramente il primo per la frazione $\frac{a}{x}$, *poi il*

resultato per il secondo, *e ancora per la frazione* $\frac{a}{x}$, *poi ancora il resultato per il terzo*, *e per la frazione* $\frac{a}{x}$ *e così di seguito*; *riunir tutti questi termini*, *aggiungere l' unità*, *e finalmente moltiplicare il tutto per il fattore* x^m.

Nell'esempio $(2x^3-5a^3)^6$ bisogna scrivere $(2x^3)^6$ in luogo di x^m, e $-\frac{5a^3}{2x^3}$ in vece di $\frac{a}{x}$. Lascerò al Lettore la cura di effettuare il calcolo (*).

145. Si riduce facilmente lo sviluppo di una potenza di un polinomio qualunque a quello delle potenze del binomio nel modo, che ora farò vedere formando la terza potenza del trinomio $a+b+c$.

Fo primieramente $b+c=m$, ed ottengo

$$(a+b+c)^3=(a+m)^3=a^3+3a^2m+3am^2+m^3;$$

ponendo in seguito per m il binomio $b+c$, che essa rappresenta, ho

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3,$$

altro non resta che sviluppare le potenze del binomio $b+c$, ed effettuar sopra queste potenze le moltiplicazioni indicate, il che darà

$$\begin{aligned}a^3 &+3a^2b+3ab^2+b^3\\ &+3a^2c+6abc+3b^2c\\ &+3ac^2+3bc^2\\ &+c^3.\end{aligned}$$

Dell' estrazione delle radici delle quantità complesse.

146. Avendo esposta la composizione delle potenze delle quantità complesse, passo adesso all' estrazione delle loro radici, principiando dalla radice cubica dei numeri.

Per effettuar l' estrazione della radice cubica dei numeri, fa di mestieri conoscer primieramente i cubi dei numeri di una

---

(*) *La formula dello sviluppo di* $(x+a)^m$ *conviene a tutti i valori dell' esponente* m, *e si applica egualmente al caso*, *in cui quest' esponente fosse frazionario*, *o negativo*. *Questa proprietà*, *che è importantissima*, *è dimostrata nel* Complemento *di questo Trattato*.

sola cifra, si troveranno questi nella seconda linea della seguente Tavola:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729;

ed il cubo di 10 essendo 1000, qualunque numero di tre cifre non contiene che il cubo di un numero di una sola cifra.

La formazione del cubo di un numero di due cifre si effettua in una maniera analoga a quella del quadrato; poichè, decomponendo questo numero in decine, e unità, denotando quindi le prime per a, le seconde per b, viene

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

il che dimostra che *il cubo, ovvero la terza potenza di un numero composto di decine, ed unità, contiene quattro parti; cioè, il cubo delle decine, tre volte il quadrato delle decine moltiplicato per le unità, tre volte le decine moltiplicate per il quadrato delle unità, e finalmente il cubo delle unità.*

Sia 47 il numero, del quale si domanda la terza potenza; facendo $a=4$ decine, ovvero 40, $b=7$ unità, troveremo

$$\begin{aligned} a^3 &= 64000 \\ 3a^2b &= 33600 \\ 3ab^2 &= 5880 \\ b^3 &= 343 \end{aligned}$$

$$\text{Totale........ } 103823=47\times47\times47.$$

Per ritornare adesso dal cubo 103823 alla sua radice 47, osserveremo primieramente che 64000, cubo delle 4 decine, non ha cifre significative di un' ordine inferiore alle migliaia; possiamo dunque, nella ricerca del cubo delle decine; far astrazione dalle centinaia, dalle decine, e dalle unità del numero 103823. Dopo di ciò, disponendo l'operazione come per l'estrazione della radice quadrata, separeremo le prime cifre 103,823 sulla destra con una virgola; il maggior cubo contenuto in 103 sarà quello delle decine. Vedremo per mezzo della Tavola precedente che questo cubo è 64, la cui radice è 4; porremo dunque 4 nel posto destinato per la radice. Si sottrarrà in seguito 64 da 103; ed allato del resto 39 abbasseremo le tre ultime cifre. Il resto totale 39823 conterrà ancora tre parti del cubo, cioè, tre volte il quadrato delle decine moltiplicato per il quadrato delle unità, ovvero $3a^2b$, tre volte le decine moltiplicate per il quadrato delle unità, ovvero $3ab^2$, e il cubo delle unità, ovvero b^3. Se si avesse il valor del prodotto $3a^2b$, siccome si conoscon di già le decine a, dividendo questo prodotto per $3a^2$,

103,823	47
64	48
39,823	

si otterrebbero le unità b; ma, benchè non conoscasi $3a^2b$, sappiamo frattanto che questo prodotto non debb' avere alcuna cifra significativa d' un ordine inferiore alle centinaia, poichè contiene il fattore a^2, ch' esprime il quadrato delle decine; non può dunque trovarsi il detto prodotto che nella parte 398, che resta del numero 39823, dopo che si son separate le decine, e le unità, nella qual parte si contengono inoltre le centinaia, provenienti dal prodotto $3ab^2$ delle decine per il quadrato delle unità, e dal cubo b^3 delle unità.

Dividendo 398 per 48, ch' esprime, nell' esempio proposto, il triplo del quadrato delle decine $3a^2$, ovvero 3×16, troveremo per quoziente 8; ma ciò, che precede, fa vedere che non si dee adottar questa cifra per le unità della radice cercata senza averla prima verificata, e ciò si fa formando le tre ultime parti del cubo, che debbono essere contenute nel resto 39823. Facendo $b = 8$, si trova.

$$3a^2b = 38400$$
$$3ab^2 = 7680$$
$$b^3 = 512$$

Totale 46592;

e questo resultato sorpassando 39823, fa vedere che bisogna diminuire il numero 8 preso per le unità. Provando 7 nella stessa maniera, si vede che esso sodisfà alle condizioni, e che per conseguenza 47 è la radice cercata

In vece di fare la verificazione, che ho adesso eseguita, si preferisce quasi sempre di alzare immediatamente al cubo il numero, che esprimono le due cifre trovate, moltiplicandolo pel suo quadrato. Operando in questa maniera sopra 48, si troverà

$$48 \times 48 \times 48 = 110592;$$

e questo numero essendo maggior del proposto 103823, mostra pure che la cifra 8 è troppo grande.

147. Ciò che abbiamo praticato sull' esempio qui sopra, debbe effettuarsi nella stessa maniera sopra tutti i numeri espressi da più di tre cifre, e meno di sette. Avendo separata le tre prime verso la destra, cercheremo il maggior cubo contenuto nella parte restante a sinistra; porteremo la sua radice nel posto, che le è stato destinato; toglieremo questo cubo dalla parte del numero proposto, sulla quale abbiamo operato; allato del resto abbasseremo le tre ultime cifre; separeremo le decine e le unità, e divideremo ciò, che resta a sinistra, per il triplo del quadrato delle decine trovate; ma prima di scrivere il quoziente alla radice, lo verificheremo alzando a cubo il numero, che esprime questa cifra unita alle

decine cognite. Se il resultato di questa operazione è troppo grande, diminuiremo la cifra delle unità; procederemo a una nuova verificazione, e così di seguito fino a che non si trovi un resultato eguale al numero proposto, o minore di questo numero, se desso non è un cubo perfetto. In questo caso la radice trovata non è che quella del maggior cubo, che esso contiene. Siccome abbiamo spesso dei resti considerabilissimi, ecco da che cosa potremo conoscere se la cifra delle unità è troppo debole.

Il cubo di $a+b$, allorchè facciamo $b=1$, divien quello di $a+1$, ed ha per espressione

$$a^3+3a^2+3a+1;$$

quantità, la quale sorpassa a^3, cubo di a, di

$$3a^2+3a+1.$$

Segue da ciò che *fintantochè il resto di un' estrazione della radice cuba sarà minore di tre volte il quadrato della radice, più tre volte la radice, più l' unità; questa radice non sarà troppo piccola.*

148. Per estrar la radice cuba da 105823817, osserveremo primieramente che qualunque sia il numero delle cifre di questa radice, se si decompone in unità, e decine, il cubo di queste ultime non potrà far parte delle tre ultime cifre verso destra, e dovrà per conseguenza trovarsi in 105823. Ma il maggior cubo contenuto in 105823 avrà più di una cifra nella sua radice, la quale potrà in conseguenza decomporsi in unità, e decine; ed il cubo di queste decine non discendono al disotto delle migliaia, non potrà far parte delle tre ultime cifre 823. Se, dopo la separazione di queste, restassero sempre più di tre cifre verso la sinistra, si ripeterebbe il ragionamento precedente, ed arriverebbesi così ad indicare il luogo del cubo delle unità dell' ordine il più elevato della radice cercata, dividendo il numero proposto in membri di tre cifre, andando dalla destra alla sinistra, potendo l' ultimo membro contenerne meno di tre.

Ciò posto, dopo d' aver preparata l' operazione secondo il solito, cercheremo primieramente, per le regola del num.° precedente, la radice cubica dei due primi membri a sinistra, e troveremo 47 per resultato; toglieremo il cubo di questo numero dai due membri, che lo contengono; allato del resto 2000 abbasseremo il membro seguente 817; ed il numero 2000817 dee contenere le tre ultime parti del cubo d' un numero, del quale 47 esprime le decine, e di cui si cercano le unità; troveremo dunque queste unità, come nell' esempio del numero precitato, separando le

105,823,817	473
64	48
41 8,23	6627
103 8 23	
2 0008,17	
105 823 817	
000 000 000.	

due ultime cifre verso la destra del resto, e dividendo la parte a sinistra per 6627, triplo del quadrato di 47. Verificheremo il quoziente 3 alzando 473 a cubo, e troveremo per resultato lo stesso numero proposto, perchè questo numero è un cubo perfetto.

La spiegazione dell' esempio qui sopra può tenere luogo di regola generale. Se il numero proposto avesse un membro di più, si continuerebbe l'operazione come l'abbiamo fatto pel terzo; e non bisognerebbe mancare di porre un zero alla radice se il numero da dividersi sulla sinistra del resto non contenesse quello, pel quale bisogna dividerlo: abbasserebbesi allora il membro seguente, e si opererebbe su questo membro riunito al resto, come sui precedenti.

149. Poichè *il cubo di una frazione si ottiene moltiplicando questa frazione pel suo quadrato*, ovvero, *ciò che è lo stesso*, *cubando il suo numeratore*, *e cubando il suo denominatore*, ne segue che *ricaderemo sulla radice*, *prendendo quella del nuovo numeratore*, *e quella del nuovo denominatore*. Il cubo di $\frac{5}{6}$, per esempio, è $\frac{125}{216}$; prendendo la radice cubica di 125, e quella di 216, si ritrova $\frac{5}{6}$.

Tale è il modo, che bisogna seguire allorchè il numeratore e il denominatore, sono ambedue cubi perfetti; ma allorchè ciò non ha luogo, ci risparmiamo la pena di estrar la radice dal denominatore, moltiplicando pel suo quadrato i due termini della frazione proposta; poichè il denominatore resultante da quest' operazione diviene il cubo del denominatore primitivo, e non resta che a prendere la radice del numeratore. Se si avesse, per esempio, $\frac{3}{5}$, moltiplicando i due termini di questa frazione per 25, quadrato del denominatore, avrebbesi

$$\frac{75}{5 \times 5 \times 5}.$$

la radice del denominatore è 5: quando a quella di 75, si trova che essa è tra 4, e 5. Limitandosi a 4, avremo $\frac{4}{5}$ per la radice di $\frac{3}{5}$, che differisce dal vero meno di $\frac{1}{5}$. Per avere una maggior esattezza, bisognerà estrar la radice approssimativa da 75 col mezzo, che indicherò in seguito.

Allorchè il denominatore sarà già un quadrato perfetto, servirà moltiplicare i due termini della frazione per trovar la radice cubica di $\frac{4}{9}$; moltiplico i due termini per 3, radice quadrata di 9, ed ottengo

$$\frac{12}{3\times3\times3};$$

prendendo la radice dal maggior cubo 8 contenuto in 12, s'ottiene $\frac{2}{3}$ per la radice cercata, che differisce dal vero meno di $\frac{1}{3}$.

150. Segue da ciò, che è stato dimostrato nel n.° 97, che la radice cubica di un numero, il quale non è un cubo perfetto, non può esprimersi esattamente per alcuna frazione, comunque grande sia il denominatore: sarà dunque questa una quantità irrazionale, ma di una specie diversa dalla radice quadrata; poichè il più spesso è impossibile di esprimere l'una per l'altra.

151. Si potrebbe ottenere la radice cubica approssimata per mezzo delle frazioni ordinarie, servendosi di un metodo analogo a quello, che ho fatto conoscere nel n.° 103 sulla radice quadrata, e troppo facile a immaginarsi per non meritare di trattenervi, visto d'altronde che riuscirebbe di poco comodo

Il maggior mezzo d'impiegare le frazioni ordinarie per questa ricerca consiste nell'estrar la radice in frazioni di una specie data. Affine di conseguire, per esempio, la radice cubica di 22, che differisca dal vero meno di un quinto dell'unità, osserveremo che il cubo di $\frac{1}{5}$ è $\frac{1}{125}$, e ridurremo in conseguenza 22 in $\frac{2750}{125}$: la radice cubica di 2750, essendo presa in numeri interi, avremo $\frac{14}{5}$, ovvero $2\frac{4}{5}$, per quella di 22.

152. Il mezzo, ch'è più in uso ond'estrarre per approssimazione la radice cubica di un numero, consiste nel convertire questo numero in frazione decimale, osservando però che ciò non può essere se non in millesime, o in millionesime, ec., perchè le decine divengono millesime allorchè s'alzano alla terza potenza, le centesime si cangiano in millionesime, ed in generale, *il numero delle cifre decimali, che si trovano nel cubo, è triplo di quello, che ne contiene la radice*. Bisogna concludere da ciò che si dee porre in seguito del numero proposto tre volte tanti zeri quanti sono i decimali, che si vogliono nella sua radice. Faremo in appresso l'estrazione secondo le regole esposte in ciò, che precede, e separeremo nel resultato il numero di cifre decimali richiesto.

Se si volesse avere, per esempio, la radice cubica di 372, che differisca dal vero meno di una centesima, si scriverebbe

bero sei zeri in seguito a questo numero, e s'estrarrebbe, secondo la regola, la radice da 327000000. Eccone l'operazione:

327,000,000	688
216	108
	13872
1110,00	
3144 32	
125 680,00	
325 660,672	
1 339 328.	

Si separerebbero in seguito due cifre decimali sulla destra del resultato, e s'avrebbe 6, 88: ma sarà più esatto il prendere 6, 89, perchè il cubo di quest' ultimo numero, benchè maggiore di 327, se ne approssima più che quello di 6, 88.

Se il numero proposto contenesse già dei decimali, bisognerebbe, prima di cominciar l'estrazione, porre alla sua destra tanti zeri quanti ne sarebbero necessarî per rendere il numero delle cifre decimali multiplo di 3. Sia, per esempio, 0,07, scriveremo 0,070: prendendo la radice di 70 millesime, troveremo 0,4. Per ispingere l'esattezza fino alle centesime, bisognerebbe porre altri tre zeri, il che farebbe 0,070000. La radice di 70000, estratta in numeri interi, essendo 41, quella di 0,07, esatta fino alle centesime, sarà 0,41.

153. Dopo aver dati i mezzi d'estrar la radice quadrata, e la radice cubica dei numeri, la formula del binomio conduce ad un metodo analogo per ottener la radice d'un grado qualunque; ma prima di esporre questo metodo farò qualche osservazione sull' estrazione delle radici, il cui esponente è un numero, che abbia dei divisori.

L'estrazione della radice quarta può effettuarsi col mezzo di due estrazioni successive della radice quadrata; poichè, prendendo in primo luogo la radice quadrata d'una quarta potenza, di a^4; per esempio, si cade sul quadrato, ovvero a^2; resultato, la cui radice quadrata è a, ovvero la quantità cercata.

Vedremo parimente che tre estrazioni successive della radice quadrata equivalgono all' estrazione della radice ottava; poichè la radice quadrata di a^8 è a^4, quella di a^4 è a^2, e finalmente quella di a^2 è a.

È evidente in questa maniera che qualunque radice d'un grado espresso da qualcuno dei numeri 2, 4, 8, 16, 32, ec., e vale a dire da una potenza di 2, s'otterrà per mezzo d'una serie d'estrazioni della radice quadrata.

Le radici, i cui esponenti non sono dei numeri primi pos-

son ridursi ad altre d' un grado meno elevato ; la radice sesta , per esempio , si otterrà per mezzo d' un' estrazione della radice quadrata , seguito da un' estrazione della radice cubica. Per conviucersene , fa di mestieri osservare che operando in questa maniera sopra a^6 , si trova in primo luogo a^3 , e poi a ; potrebbesi ancora prender prima la radice cubica , il che darebbe a^2 , indi la radice quadrata , ed avrebbesi a.

154 Passo adesso al metodo generale, il quale applicherò al quinto grado. Il suo andamento sarà più facile a intendersi sopra un caso particolare ; e paragonandolo a quello , che ho dato per l' estrazione della radice quadrata , e per quella della radice cubica , vedremo senza pena come bisognerà operare per un grado qualunque.

Sia da estrarsi pertanto la radice quinta da 231554007. Osservo primieramente che il più piccol uumero di due cifre , vale a dire 10 , n' ha sei alla sua quinta potenza, ch'è 100000 , e ne concludo che la radice quinta del numero proposto ha almeno due cifre : potrò dunque rappresentare questa radice per $a+b$, a essendo le decine , e b le unità ; ed il numero proposto avrà per espressione

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + \text{ec.}$$

Non isviluppo tutti i termini di questa potenza , perchè serve conoscere la composizione de' due primi , come adesso vedremo.

Ciò posto , è evidente che a^5 , ovvero la quinta potenza delle decine di questa radice , non potendo discendere al di sotto delle centinaia di migliaia , non fa parte delle cinque cifre sulla destra : separo dunque queste cinque cifre. Se ne restassero più di cinque a sinistra , farei riguardo a queste il medesimo ragionamento , che ho fatto adesso , e decomporrei così il numero proposto in tanti membri di cinque cifre, andando dalla destra alla sinistra : l' ultimo di questi membri verso la sinistra conterrà la quinta potenza delle unità dell'ordine il più alto , che sia nella radice.

Formando le quinte potenze dei numeri d'una sola cifra , riconosco che 2315 cade tra la quinta potenza di 4, ch' è 1024 , e quella di 5, ch' è 3125.

2315, 54007	47
1024	
12915, 4007	1280

Prendo dunque 4 per le decine della radice cercata , e togliendo la quinta potenza di questo numero , ovvero 1024 , dal primo membro del numero proposto, ho di resto 1291 , allato del quale abbasso il membro seguente. Il numero , che ne resulta , dee contenere i termini $5a^4b + 10a^3b^2 + \text{ec.}$, che restano di $(a+b)^5$, dopo che abbiamo tolto a^5 ; ma il più elevato di questi termini è $5a^4b$, ovvero cinque volte la quar-

ta potenza delle decine moltiplicato per le unità, perchè non discende al disotto delle decine di migliaia. Per considerarlo in particolare, separeremo le quattro ultime cifre sulla destra, le quali non ne fan parte, ed il numero 12915, che resta a sinistra, conterrà questo termine, più le decine di migliaia provvenienti dai termini, che lo seguono. Si vede dunque che dividendo 12915 per $5a^4$, ovvero per cinque volte la quarta potenza delle 4 decine trovate, non arriveremo che ad approssimarsi alle unità. La quarta potenza di 4 è 256; il suo quintuplo si eleva a 1280; dividendo 12915 per 1280, si troverebbe 10 per quoziente; ma non si può porre più di 9 nella radice, e bisogna ancora prima d'adottar questa cifra, tentare se la radice 49, che s'ottiene aggiungendola alle 4 decine, che digià abbiamo, produca una quinta potenza maggiore del numero dato. Si trova in questa maniera che bisogna diminuire il numero 49 di due unità, e che la vera radice è 47, con un resto eguale a 2209000; poichè la quinta potenza di 47 e 229345007, e vale a dire, che la radice esatta del numero proposto cade tra 47, e 48.

Se vi fosse un membro di più, s'abbasserebbe per unirlo al resto, che in questo caso ha lasciato la sottrazione della quinta potenza effettuata sopra i due primi membri; opererebbesi sul resto totale come lo abbiam fatto sul precedente, e così in seguito.

Dopo quello che abbiam detto, è facile d'estendere al caso attuale le regole date tanto per estrarre la radice quadrata, e la radice cubica delle frazioni, quanto per approssimarsi alle radici delle potenze imperfette di questi gradi.

155. Col mezzo di metodi fondati sui principî medesimi arrivasi ad estrar le radici delle quantità letterali; l'esempio seguente servirà per far vedere come dobbiamo contenerci per un grado qualunque.

Abbiamo trovato nel n.° 143 la sesta potenza di $2x^3-5a^3$; riprendo questa potenza per estrarne la radice sesta; e per far ciò la dispongo nel modo seguente:

$$\begin{array}{l|l} 64x^{18}-960a^3x^{15}+6000a^6x^{12}-20000a^9x^9 & \\ \qquad +37500a^{12}x^6-37500a^{15}x^3 & 2x^3-5a^3 \\ \qquad\qquad +15625a^{18} & \overline{192x^{15}} \\ \underline{-64x^{18}} & \\ \text{resto}-960a^3x^{15}+\text{ec.} & \end{array}$$

La quantità proposta essendo ordinata per rapporto a x, il suo primo termine debb'essere la sesta potenza del primo termine della radice ordinata nella stessa maniera; prendendo in conseguenza la radice sesta di $64x^{18}$, secondo la regola del n.° 129 si ha $2x^3$.

Alzando questo resultato alla sesta potenza, e sottraendola dalla quantità proposta, il resto, che ottiensi, comincia necessariamente dal secondo termine dello sviluppo della sesta potenza de' due primi termini della radice. Ora, nell'espressione

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + \text{ec.}$$

questo termine è il prodotto di sei volte la quinta potenza del primo termine della radice per il secondo; e se si dividesse per $6a^5$, il quoziente sarebbe il secondo termine b.

Bisogna dunque formare il sestuplo della quinta potenza del primo termine $2x^3$ della radice, il che darà

$$6 \times 32x^{15}, \text{ ovvero } 192x^{15},$$

e dividere per questa quantità il termine $-960a^3x^{15}$, col quale principia il sesto dell' operazione precedente; il quoziente $-5a^3$ è il secondo termine della radice. Per verificarlo, alzerebbesi alla sesta potenza il binomio $2x^3-5a^3$, ed il resultato darebbe la quantità proposta.

Se la radice dovesse contenere un termine di più, trovErebbesi, dopo l' operazione adesso esposta, un secondo resto; il quale principierebbe col sestuplo del prodotto della quinta potenza dei due primi termini della radice per il terzo, e che perciò bisognerebbe dividere per $6(2x^3-5a^3)^5$: il quoziente sarebbe questo terzo termine della radice, la quale verificherebbesi formando la sesta potenza dei tre termini già trovati: Si procederebbe nella stessa maniera per trovar tutti i termini consecutivi, qualunque fosse il numero dei medesimi.

Delle Equazioni a due termini.

156. Ogni equazione, la quale non contiene che una sola potenza dell' incognita, combinata con delle quantità cognite, può sempre ridursi a due termini, uno de' quali è la riunione di tutti quelli che contengono l' incognita, e l' altro comprende l' insieme delle quantità date: ciò lo abbiamo già veduto per il secondo grado nel n.° 105, ed è facile concepirlo per un grado qualunque.

Se abbiamo per esempio, l' equazione

$$a^2x^5 - a^5b^2 = b^4c^3 + acx^5,$$

passando tutti i termini affetti da x in un sol membro, ne dedurremo

$$a^2x^5 - acx^5 = b^4c^3 + a^5b^2,$$

ovvero $$(a^2-ac)x^5 = b^4c^3 + a^5b^2.$$

Se adesso si rappresentano le quantità

a^2-ac per p, $b^4c^3+a^5b^2$ per q,

l' equazione precedente diverrà

$$px^5 = q\,;$$

e liberando del coefficiente la quantità x^5, avremo

$$x^5 = \frac{q}{p},$$

dalla quale concluderemo

$$x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}.$$

In generale, qualunque equazione a due termini essendo ridotta alla forma

$$px^m = q\,,$$

dà allora;

$$x^m = \frac{q}{p}\,;$$

e prendendo la radice del grado m da ciascun membro, si consegue

$$x = \sqrt[m]{\frac{q}{p}}.$$

157. Bisogna osservare che, se l'esponente m è un numero impari, il radicale non avrà che un solo segno, e sarà quello della quantità ch'è affetta dal radicale medesimo (131).

Quando l' esponente m sarà pari, il radicale avrà il doppio segno $\pm$; sarà immaginario se la quantità $\frac{q}{p}$ è negativa, ed il problema sarà allora assurdo, come nel secondo grado (131).

Ecco alcuni esempî.

L'equazione $x^5 = -1024$. dà

$$x = \sqrt[5]{-1024} = -4,$$

perchè l' esponente 5 è impari.

L' equazione $x^4 = 625$ dà

$$x = \mp\sqrt[4]{625} = \mp 5,$$

perchè l' esponente 4 è pari.

Finalmente, l' equazione $x^4 = -16$ dando

$$x = \mp\sqrt[4]{-16},$$

non conduce che a dei valori immaginarî, poichè l'esponente 4 essendo pari, la quantità posta sotto il radicale è negativa.

158. Prima d'andare più avanti, farò conoscere un fatto analitico, il quale sarà utilissimo tanto per il seguito di quest'Opera che per il suo *Complemento*, e ch'è assai notabile per se stesso: questo è che tutte l'espressioni $x-a$, x^2-a^2, x^3-a^3, ed in generale x^m-a^m (m essendo un numero intero positivo qualunque) sono esattamente divisibili per $x-a$. La cosa è evidente per la prima; si sa che la seconda

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a)\ (34),$$

e per mezzo della divisisione si decomporrebbero facilmente le altre. Dividendo parimente x^m-a^m per $x-a$, troverebbesi per quoziente

$$x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\text{ec.}$$

l'esponente di x andando sempre diminuendo d'una unità, e quello di a aumentando nella stessa maniera; ma in vece di seguire le particolarità di quest'operazione, porrò immediatamente l'equazione

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1},$$

la quale può verificarsi, moltiplicando il secondo membro per $x-a$. Diviene allora

$$\begin{array}{l} x^m+ax^{m-1}+a^2x^{m-2}\ldots\ldots+a^{m-2}x^2+a^{m-1}x \\ -ax^{m-1}-a^2x^{m-2}-a^3x^{m-3}\ldots-a^{m-1}x-a^m; \end{array}$$

tutti i termini della prima linea, a partir dal secondo, essendo gli stessi, ad eccezione del segno, che quelli, i quali precedon l'ultimo della seconda linea, resta solamente, dopo la riduzione, x^m-a^m, vale a dire il dividendo proposto.

Bisogna osservare che in seguito del termine a^2x^{m-2} viene necessariamente nella linea superiore il termine a^3x^{m-3}, il quale si trova distrutto dal suo corrispondente nella linea inferiore; e che parimente nella linea inferiore trovasi avanti il termine $a^{m-1}x$ un termine $-a^{m-2}x^2$, il quale distrugge il suo corrispondente superiore. Questi termini non sono scritti, perchè si sottintendono compresi nella lacuna indicata dai punti.

159. Ciò conduce a delle conseguenze importantissime relativamente all'equazione a due termini $x^m=\frac{q}{p}$.

Denotando per a il numero, che s'ottiene per l'estrazione immediata della radice, eseguita secondo le regole del numero 154, si ha

$$\frac{q}{p}=a^m,\quad \text{ovvero}\ x^m=a^m,$$

e trasportando il secondo membro nel primo, viene

$$x^m - a^m = 0.$$

La quantità $x^m - a^m$ si divide per $x - a$, e si ha, per il n.° precedente,

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1});$$

quest' ultimo resultato, che svanisce allorchè $x = a$, diverrebbe egualmente nullo se si avesse

$$x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1} = 0 \quad (116);$$

e se in conseguenza esistesse un valore di x, il quale sodisfacesse a quest' ultima equazione, esso sodisfarebbe egualmente alla proposta.

Questi valori hanno coll' unità delle relazioni semplicissime, le quali si scopriranno facendo $x = ay$: per mezzo di ciò l'equazioae $x^m - a^m = 0$, diverrà

$$a^m y^m - a^m = 0, \text{ ovvero } y^m - 1 = 0;$$

e si otterranno i valori di x moltiplicando quelli di y per il numero a.

L' equazione $y^m - 1 = 0$ dà in primo luogo

$$y^m = 1, \; y = \sqrt[m]{1} = 1,$$

poi dividendo $y^m - 1$ per $y - 1$, si ottiene

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \ldots + y^2 + y + 1,$$

e questo quoziente, essendo eguagliato a zero, è l'equazione, da cui dipendono gli altri valori di y, i quali avranno, nello stesso modo che l' unità, la proprietà di sodisfare all' equazione

$$y^m - 1 = 0, \text{ ovvero } y^m = 1;$$

e vale a dire che la loro potenza del grado m sarà l' unità.

Da ciò resulta questa conseguenza, singolare a prima vista, cioè, che l'unità può aver più *radici* oltre a se stessa.

Queste radici, le quali sono immaginarie, hanno, malgrado ciò, un uso frequente nell' Analisi: ma non posso qui far conoscere se non che quelle dei quattro primi gradi, perchè, col mezzo di ciò che precede, non si può risolvere che per questi soli gradi l' equazione

$$y^{m-1} + y^{m-2} + \ldots\ldots + 1 = 0,$$

la quale le somministra.

Sia 1.° $m = 2$, abbiamo

$$y^2 - 1 = 0,$$

dalla qnale ricavasi

$$y = +1, \; y = -1.$$

2.° Facendo $m=3$ si ottiene

$$y^3-1=0,$$

dalla quale deducesi

$$y=1,$$

poi

$$y^2+y+1=0.$$

Quest' ultima equazione essendo risoluta, dà

$$y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

così abbiamo, per questo grado le tre radici

$$y=1,\ y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

Le due ultime sono immaginarie; ma, se ne facciamo il cubo, formando a norma del n.° 34 quello del numeratore, e se si osserva che il quadrato di $\sqrt{-3}$ essendo -3, il suo cubo è $-3\sqrt{-3}$, troveremo pure $y^3=1$, come per la radice $y=1$.

3.° Prendendo $m=4$, si ha

$$y^4-1=0,$$

dalla quale se ne deduce

$$y=1,$$

dipoi

$$y^3+y^2+y+1=0,$$

che riducesi a

$$y^2(y+1)+y+1=(y+1)(y^2+1)=0$$

di dove ricavasi

$$y+1=0,\ \text{oppure}\ y^2+1=0;$$

equazioni, che danno

$$y=-1,\ y=+\sqrt{-1},\ y=-\sqrt{-1}:$$

le quattro radici della proposta sono dunque

$$y=+1,\ y=-1,\ y=+\sqrt{-1},\ y=-\sqrt{-1}.$$

Di questi quattro valori due solamente sono reali, e gli altri due immaginarî.

Questa moltiplicità di radici dell' unità dipende da una legge generale delle equazioni, dietro alla quale una incognita ammette tanti valori quante unità vi sono nell'esponente del grado dell' equazione, che la determina; e quando il problema non comporta questo numero di soluzioni reali, esso divien completo per mezzo di simboli puramente algebrici, i quali trovandosi sottomessi alle operazioni indicate nell' equazione, la verificano.

Segue da ciò che le radici dei numeri hanno due specie di espressioni, o valori; la prima, che io chiamerò *determinazione aritmetica*, è il numero che si trova coi metodi esposti nel n.° 154., e che è unico per ciascun caso particolare; la seconda comprende i valori negativi, e l'espressioni immaginarie, le quali io denoterò sotto il nome di *determinazioni algebriche*, perchè desse non debbono la loro esistenza che alla combinazione dei segni dell' Algebra.

Delle equazioni, le quali posson risolversi come quelle del secondo grado.

160. Il carattere di tali equazioni consiste in questo che esse non contengono che due potenze differenti dell' incognita, e che l'esponente dell' una è doppio di quello dell' altra; la loro formula generale è

$$x^{2m}+px^m=q;$$

p, e q essendo quantità cognite.

Se prendiamo in primo luogo x^m per l' incognita, ovvero se facciasi $x^m=u$, avremo

$$x^{2m}=u^2,$$

onde

$$u^2+pu=q,$$

$$u=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2}\quad(109);$$

rimettendo x^m in luogo di u, otterremo

$$x^m=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2};$$

equazione a due termini, poichè l' espressione

$$-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2},$$

non contenendo che delle operazioni cognite, da effettuarsi sopra delle quantità date, debb' esser riguardata come rappresentante delle quantità cognite.

Rappresentando per a, e per a' i due valori di questa espressione, avremo

$$x^m=a,\ \text{e}\ x^m=a',$$

da cui ricaveremo

$$x=\sqrt[m]{a},\ \text{e}\ x=\sqrt[m]{a'}.$$

Se l'esponente m fosse pari, in vece dei due valori qui sopra se ne avrebbero quattro, poichè ciascun radicale sarebbe suscettibile del segno $\pm$: ne verrebbe

$$x=+\sqrt[m]{a},\ x=+\sqrt[m]{a'},$$

$$x=-\sqrt[m]{a},\quad x=-\sqrt[m]{a'};$$

e questi quattro valori sarebbero reali se le quantità a, e a' fossero positive.

Tutti i valori di x saranno compresi in una formula sola, indicando immediatamente la radice dei due membri dell'equazione

$$x^m=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2},$$

il che darà

$$x=\sqrt[m]{-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2}}.$$

Il Problema seguente conduce ad una equazione di questo genere.

161. *Decomporre il numero* 6 *in due fattori tali che la somma de' loro cubi sia* 35.

Sia x uno di questi fattori, l'altro sarà $\frac{6}{x}$, ed avremo, per la somma dei loro cubi, x^3 e $\frac{216}{x^3}$, l'equazione

$$x^3+\frac{216}{x^3}=35,$$

la quale riducesi a

$$x^6+216=35x^3,$$

ovvero a

$$x^6-35x^3=-216.$$

Se riguardasi x^3 come l'incognita, otterremo, per mezzo della regola dell'equazioni di secondo grado,

$$x^3=\tfrac{35}{2}\pm\sqrt{(\tfrac{35}{2})^2-216}$$

Effettuando i calcoli numerici indicati troveremo

$$(\tfrac{35}{2})^2=\tfrac{1225}{4},$$

$$\sqrt{(\tfrac{35}{2})^2-216}=\sqrt{\tfrac{361}{4}}=\tfrac{19}{2},$$

ed in conseguenza

$$x^3=\tfrac{35}{2}+\tfrac{19}{2}=\tfrac{54}{2}=27,$$

$$x^3=\tfrac{35}{2}-\tfrac{19}{2}=\tfrac{16}{2}=8,$$

donde ricavasi

$$x=\sqrt[3]{27}=3,$$

$$x=\sqrt[3]{8}=2.$$

Il primo valore dà per il secondo fattore $\frac{6}{3}$, ovvero 2, laddove che il secondo valore conduce a $\frac{6}{2}$ ovvero 3; abbiamo dunque in un caso 3, e 2 pei fattori cercati, e nell' altro 2, e 3. Queste due soluzioni non differiscono così che per un cangiamento d' ordine nei fattori del numero dato 6.

162. L'equazioni che ho adesso considerate, son egualmente comprese nella legge generale enunciata al n.° 159; poichè bisogna moltiplicare i valori di $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{a'}$ per le radici delle unità nel grado m.

Applicando questa considerazione all' equazione.

$$x^6-35x^3=-216,$$

troveremo le sei radici seguenti:

$$x=1\times 3, \qquad x=1\times 2,$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times 3; \quad x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times 2;$$

$$x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times 3, \quad x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times 2,$$

delle quali le due prime sono le sole reali.

Del calcolo dei radicali.

163. Il gran numero dei casi, ne' quali non si possono estrarre esattamente le radici, e la lunghezza dell' operazione necessaria affine di conseguirle per approssimazione, han condotto gli Algebristi a procurar di eseguire immediatamente sulle quantità sottomesse ai segni radicali le operazioni fondamentali indicate sopra le loro radici, ed a simplificarne tanto quanto era possibile i resultati, in modo da protrarre alla fine del calcolo l' operazione la più complicata, e vale a dire l'estrazione, per non doverla effettuare che sopra i più piccoli numeri, ovvero sull' espressioni le più semplici, che i Problemi proposti possano comportare.

La somma e la sottrazione delle quantità radicali dissimili non possono che indicarsi col mezzo dei segni $+$, e $-$. Per esempio, le somme

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{a}, \qquad \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b},$$

le differenze

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[5]{a}, \qquad \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b},$$

non son suscettibili di un' altra espressione.

Non sarebbe lo stesso della quantità

$$4a\sqrt[3]{2b} + \sqrt[3]{16a^3b} - \frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6b},$$

perchè i radicali, che la compongono, possono divenir simili mediante la simplificazione indicata nel n.° 130. Osserverebbesi primieramente che

$$\sqrt[3]{16a^3b} = \sqrt[3]{8a^3.2b}, \text{ ovvero } 2a\sqrt[3]{2b},$$

$$\sqrt[3]{2a^6b} = \sqrt[3]{a^6.2b}, \text{ ovvero } a^2\sqrt[3]{2b};$$

ond' avrebbesi

$$4a\sqrt[3]{2b} + 2a\sqrt[3]{2b} - \frac{5a^2c}{ad}\sqrt[3]{2b};$$

e riducendo otterrebbesi

$$6a\sqrt[3]{2b} - \frac{5ac}{d}\sqrt[3]{2b}, \text{ ovvero } (6d-5c)\frac{a}{d}\sqrt[3]{2b}.$$

164. A riguardo delle altre operazioni, il calcolo de' radicali riposa sopra questo principio di già citato: *Se si alzano i differenti fattori di un prodotto a una medesima potenza; il prodotto sarà alzato a questa potenza.* Da un altro lato, è visibile che si alza una quantità radicale alla potenza del medesimo esponente, che ha il radicale, sopprimendo questo radicale. Per esempio, $\sqrt[7]{a}$ alzata alla settima potenza è semplicemente a, poichè quest' operazione, inversa di quella, che indica il segno $\sqrt[7]{\ }$, non fa che ridurre al suo primo stato la quantità a.

Ciò posto, se, per esempio, nell' espressione

$$\sqrt[7]{a} \times \sqrt[7]{b}$$

si sopprimono i radicali, il resultato ab sarà la settima potenza del prodotto indicato qui sopra; e prendendo la radice settima, ne concluderemo

$$\sqrt[7]{a} \times \sqrt[7]{b} = \sqrt[7]{ab}.$$

Questo ragionamento, il qual può applicarsi a qualunque altro caso, fa manifesto che, *per moltiplicare due espressioni radicali del medesimo grado, bisogna fare il prodotto delle quantità sottoposte ai radicali, e rendere affetto questo prodotto da un radicale del medesimo grado.*

Per mezzo di questa regola, si ha

$$3\sqrt{2ab^2} \times 7\sqrt{5a^3bc} = 21\sqrt{10a^4b^4c} =$$

$$21a^2b^2\sqrt{10c}:$$

$$4\sqrt{a^2-b^2} \times \sqrt{a^2+b^2} = 4\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} =$$

$$4\sqrt{a^4-b^4}:$$

$$\sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4}} \times \sqrt[5]{\frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}$$

$$=\sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4} \times \frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}$$

$$=\sqrt[5]{\frac{a^3(2a^6-b^6)}{a^4-b^4} \times \frac{b^3c^2}{d^2}(a^2+b^2)}$$

$$=\sqrt[5]{\frac{a^3b^3c^2}{d^2} \times \frac{2a^6-b^6}{a^2-b^2}},$$

a motivo che

$$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2).$$

165. Se si considera che la settima potenza dell' espressione $\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}}$, per esempio, è $\frac{a}{b}$, ne concluderemo, prendendo la radice settima di quest' ultimo resultato, che

$$\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}} = \sqrt[7]{\frac{a}{b}};$$

dal che ne segue che, *per dividere l' una per l' altra due quantità radicali del medesimo grado, bisogna prendere il quoziente delle quantità sottoposte ai radicali, e rendere questo quoziente affetto da un radicale del medesimo grado.*

Si trova, per mezzo di questa regola, che

$$\frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{6ab}{3a}} = \sqrt{2b};$$

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a+b}}=\sqrt{a-b}$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^4b}}{\sqrt[5]{b^4c^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^4b}{b^4c^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^3c^2}}.$$

166. Segue dalla regola della moltiplicazione dei radicali del medesimo grado, data nel n.° 164, che *per alzare una quantità radicale a una potenza qualunque, serve alzare a questa potenza la quantità sottoposta al radicale, e rendere questo resultato affetto dal radicale medesimo*; poichè, per esempio, alzare $\sqrt[5]{ab}$ alla terza potenza, vuol dire effettuare il prodotto

$$\sqrt[5]{ab}\times\sqrt[5]{ab}\times\sqrt[5]{ab};$$

e siccome i radicali sono del medesimo grado, bisogna (164) moltiplicare tra loro le quantità affette dai medesimi, poi porre il segno radicale avanti il prodotto; il che dà

$$\sqrt[5]{a^3b^3}.$$

Parimente $\sqrt[7]{a^2b^3}$ alzata alla quarta potenza dà $\sqrt[7]{a^8b^{12}}$, la quale riducesi a

$$\sqrt[7]{ab^5},$$

decomponendo a^8b^{12} in $a^7b^7\times ab^5$, e prendendo la radice del fattore a^7b^7 (130).

È pure a proposito di osservare che, *quando l'esponente del radicale è divisibile per quello della potenza, alla quale si alza la quantità proposta, l'operazione si effettua dividendo il primo esponente per il secondo*: Per esempio,

$$\left(\sqrt[6]{a}\right)^2=\sqrt[3]{a},$$

perchè $\frac{6}{2}=3$

Infatti $\sqrt[6]{a}$ indica una quantità, la quale è sei volte fattore in a, e la quantità $\sqrt[3]{a}$, la quale si ottiene dividendo l'esponente 6 per 2, non essendo altro che tre volte fattore in a, equivale in conseguenza al prodotto di due dei primi fattori; dessa è dunque la seconda potenza di uno di questi fattori; ovvero di $\sqrt[6]{a}$.

Lo stesso ragionamento si applicherebbe all' esempio presente, ed a qualunque altro :

$$\left(\sqrt[12]{a^2b}\right)^3 = \sqrt[4]{a^2b}.$$

167. Rovesciando le regole dell' articolo precedente, si conseguiscono quelle, che fa di mestieri seguire nell' estrazione delle radici dalle quantità radicali.

È manifesto primieramente riguardo alla prima che, *se gli esponenti delle quantità sottoposte al radicale son divisibili per quello della radice, che si vuole estrarre, si effettuerà l'operazione come se non vi fosse alcun radicale, e si renderà affetto il resultato dal radicale primitivo.*

Si trova, per esempio, che

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt[5]{a^2}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4b^8}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4b^8}} = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Dalla seconda regola del num.° precedente si conclude, che *l' estrazione della radice delle quantità radicali si indica in generale moltiplicando l' esponente radicale per quello della radice; che si vuole estrarre.*

Per mezzo di questa regola, trovasi che

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}.$$

Difatto, $\sqrt[5]{a^4}$ è una quantità, ch'è cinque volte fattore in a^4 (24, 129); ma la radice cubica di $\sqrt[5]{a^4}$ dovendo pure esser tre volte fattore in quest'ultima quantità, si troverà 5×3 volte, ovvero 15 volte fattore nella prima a^4: dunque

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$. Dimostrerebbesi parimente che $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$.

168. Poichè moltiplicando l' esponente di una quantità sottoposta ad un radicale per un numero (166) s' innalza la radice alla potenza indicata da questo numero, e moltipli-

cando pure per il medesimo numero l' esponente del radicale (167) si estrae dal resultato una radice di grado eguale a quello della potenza, che abbiamo formata, ne segue che qoesta seconda operazione riduoe al suo primo stato la quantità proposta.

L' espressione $\sqrt[5]{a^3}$, per esempio, può cangiarsi in $\sqrt[35]{a^{21}}$, la quale si ottiene moltiplicando per 7 gli esponenti 5, e 3; poichè moltiplicare per 7 l'esponente a^3 vuol dire formar la settima potenza del radicale proposto, il che dà il radicale $\sqrt[5]{a^{21}}$; e moltiplicando per sette l' esponente 5 del radicale $\sqrt[5]{a^{21}}$ vuol dire prendere la radice settima del resultato; operazione, la quale distrugge l' effetto della prima.

169. Mediante questa doppia operazione *riduconsi al medesimo grado un numero qualunque di radicali di gradi diversi, moltiplicando ad un tempo l' esponente di ciascun radicale, e quelli delle quantità al medesimo sottoposte, per il prodotto degli esponenti di tutti gli altri radicali.* L' ideutità dei nuovi esponenti dei radicali è per se stessa evidente, poichè dessi sono formati dal prodotto di tutti gli esponenti dei radicali primitivi, e dietro a ciò, che precede, ciascuna quantità radicale non ha cangiato valore.

Per mezzo di questa regola si trasformano

$$\sqrt[5]{a^3b^2}, \text{ e } \sqrt[7]{c^4d^3},$$

in

$$\sqrt[35]{a^{21}b^{14}}, \text{ e } \sqrt[35]{c^{20}d^{15}};$$

parimente le tre quantità

$$\sqrt[3]{ab^2}, \quad \sqrt[5]{b^2c^3}, \quad \sqrt[7]{b^4c^3},$$

divengono respettivamente

$$\sqrt[105]{a^{35}b^{70}}, \quad \sqrt[105]{b^{42}c^{63}}, \quad \sqrt[105]{b^{60}c^{45}}.$$

Se vi fosser dei numeri sotto i radicali, bisognerebbe alzare ancor questi alla potenza espressa dal prodotto degli esponenti degli altri radicali.

170. Parimente si può *passar sotto il segno radicale un fattore, che ne sia fuori, alzandolo alla potenza espressa dall' esponente del radicale.*

Cangeremo, per esempio,

$$a^2 \text{ in } \sqrt[5]{a^{10}}, \text{ e } 2a\sqrt[3]{b}, \text{ in } \sqrt[3]{8a^3b}.$$

171. Dopo di aver ridotti al medesimo grado, per la tra-

sformazione precedente, dei radicali qualunque, applicheremo loro senza difficoltà le regole date nei num.i 164, e 165 concernenti la moltiplicazione, e la divisione delle quantità radicali del medesimo grado.

Sia in generale

$$\sqrt[m]{a^p b^q} \times \sqrt[n]{b^r c^s};$$

cangio (169)

$$\sqrt[m]{a^p b^q}, \quad \sqrt[n]{b^r c^s},$$

in

$$\sqrt[mn]{a^{np} b^{nq}}, \quad \sqrt[mn]{b^{mr} c^{ms}};$$

e la regola del n.° 164 dà

$$\sqrt[mn]{a^{np} b^{nq}} \times \sqrt[mn]{b^{mr} c^{ms}} = \sqrt[mn]{a^{np} b^{nq+mr} c^{ms}}$$

per il prodotto dei radicali proposti.

Abbiamo pure per il n.° 165.

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{\sqrt[mn]{a^{np} b^{nq}}}{\sqrt[mn]{b^{mr} c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np} b^{nq}}{b^{mr} c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np} b^{nq-mr}}{c^{ms}}}$$

Osservazioni sopra alcuni casi singolari del Calcolo dei radicali.

172. Le regole, dalle quali abbiamo fatto dipendere il calcolo dei radicali, si applicano senza difficoltà alle quantità reali; ma esse indurrerebbero in errore per rapporto alle quantità immaginarie. se non si accompagnassero con alcune osservazioni, le quali dipendono dalle proprietà dell' equazioni a due termini.

Per esempio, la regola del n.° 164 dà immediatamente

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{-a \times -a} = \sqrt{a^2};$$

e se noi ci contentassimo di prender $+a$ per $\sqrt{a^2}$, il resultato sarebbe visibilmente falso, poichè il prodotto $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, essendo il quadrato di $\sqrt{-a}$, deve ottenersi sopprimendo il radicale, ed è in conseguenza eguale a $-a$.

Bezout ha spiegata benissimo questa difficoltà osservando che quando s' ignora in qual maniera sia stato formato il quadrato a^2, e che se ne dimanda la radice, si deve assegnare

egualmente $+a$, e $-a$; ma quando sappiamo d'altronde quale di queste due quantità è stata moltiplicata per se stessa onde produrre a^2; non è più permesso, ritornando indietro, di prenderne un'altra. Questo caso è evidentemente quello dell'espressione $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$: sappiamo allora che la quantità a^2 compresa sotto il radicale $\sqrt{a^2}$ viene da $-a$ moltiplicata per $-a$; l'ambiguità dunque cessa; e quando ritorniamo alla radice bisogna porre $-a$.

Lo stesso imbarazzo avrebbe pur luogo per il prodotto $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$ se non si fosse condotti, perchè non vi è alcun segno $-$ nell'espressione, a prendere immediatamente il valore positivo di $\sqrt{a^2}$. Bisognerebbe far attenzione che, in questo caso, a^2 venendo da $+a$ moltiplicato per $+a$, la sua radice deve necessariamente essere $+a$.

Questi ragionamenti non lasciano nessun dubbio sul caso particolare, che abbiamo considerato, ma ve ne sono altri, i quali non si possono spiegar chiaramente se non che mediante le proprietà dell'equazioni a due termini.

173. Se, per esempio, si domandasse il prodotto $\sqrt[4]{a}\ \sqrt{-1}$, riducendo il secondo radicale al medesimo grado del primo (169), si avrebbe

$$\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{+1} = \sqrt[4]{a};$$

resultato reale, benchè sia evidentissimo che la quantità reale $\sqrt[4]{a}$, moltiplicata per la quantità immaginaria $\sqrt{-1}$, deve dare un prodotto immaginario. Non bisogna creder frattanto che l'espressione $\sqrt[4]{a}$ sia interamente falsa, ma solamente che si prende allora in un senso troppo particolare.

Infatti, $\sqrt[4]{a}$ considerata algebricamente, essendo l'espressione dell'incognita x, nell'equazione a due termini

$$x^4 - a = 0,$$

è suscettibile di quattro determinazioni differenti (159), poichè, se facciamo $a = \alpha^4$, rappresentando per α il valore numerico di $\sqrt[4]{a}$ fatta astrazione dal segno, ovvero la determinazione aritmetica di questa quantità, avremo i quattro valori

$$\alpha \times +1,\ \alpha \times -1,\ \alpha \times +\sqrt{-1},\ \alpha \times -\sqrt{-1},$$

il terzo de' quali è precisamente il prodotto proposto.

Con un poco di attenzione riconoscesi facilmente la causa dell'ambiguità, che abbiamo osservato. La seconda poten-

za $+1$ della quantità -1 posta sotto il radicale quadrato, potendo esser prodotta tanto da $+1\times+1$ che da -1×-1, s'introducono nella quantità $\sqrt[4]{1}$ due determinazioni, le quali non si trovano in $\sqrt{-1}$.

In generale, la maniera, colla quale abbiamo trovata la regola, che serve a formare il prodotto $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}$, riducesi ad alzare questo prodotto alla potenza mn; poichè, se si fosse rappresentato questo prodotto per z, e si fosse fatto.

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}=z,$$

inalzando primieramente alla potenza m, si sarebbe ottenuto

$$a\sqrt[n]{b^m}=z^m;$$

di poi alzando ancora alla potenza n, sarebbesi avuto

$$a^n b^m=z^{mn}.$$

Questo prodotto non essendo dunque cognito che per la sua potenza del grado mn, ovvero per un equazione a due termini di questo grado, debbe avere mn determinazioni (159); e queste si concepiscono facilmente allorchè si fa attenzione che l'espressioni $\sqrt[m]{a}$, e $\sqrt[n]{b}$, non essendo altra cosa che i valori delle incognite x, e y nell'equazioni a due termini

$$x^m-a=0,\ y^n-b=0,$$

ed in conseguenza suscettibili di m, e di n determinazioni, potremo, combinando ciascuna delle m determinazioni di x con ciascuna delle n determinazioni di y, ottenere mn determinazioni del dimandato prodotto.

Quando si tratta di quantità reali la scelta non è imbarazzante, perchè il numero delle determinazioni di questa specie non sorpassa mai due (157), le quali non differiscono che per il segno.

174. Facendo uso della trasformazione notata nel n.° 159, si fa cadere tutta la difficoltà sulle radici di $+1$, ovvero di -1; poichè se si pone $x=\alpha t$, e $y=\beta u$, α e β indicando le determinazioni numeriche di $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, senza aver riguardo al segno, l'equazioni

$$x^m\mp a=0;\ y^n\mp b=0$$

divengono

$$t^m\mp 1=0, u^n\mp 1=0,$$

e se ne ricava l'espressione

$$xy=\sqrt[m]{\pm a}\times\sqrt[n]{\pm b}=\alpha\beta tu=\alpha\beta\sqrt[m]{\pm 1}\times\sqrt[n]{\pm 1};$$

nella quale $\alpha\beta$ rappresenta il prodotto dei numeri $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n']{b}$, ovvero la determinazione aritmetica della radice del grado mn del numero $a^n b^m$.

Quando vorremo particolarizzare il prodotto dei radicali $\sqrt[m]{\pm a}$, $\sqrt[n]{\pm b}$ per una determinazione speciale di questi radicali, bisognerà trovare, dietro l' equazioni

$$t^m \mp 1 = 0\,,\quad u^n \mp 1 = 0\,,$$

le diverse espressioni di $\sqrt[m]{\pm 1}$, $\sqrt[n]{\pm 1}$, e combinarle convenevolmente.

Del rimanente queste operazioni non si presentano che per alcuni casi semplicissimi, de' quali ecco qui i principali:

1.° $$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}\,(\sqrt{-1} \times \sqrt{-1});$$

sopprimo il radicale di $\sqrt{-1}$, ed ottengo

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}.$$

2.° $$\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab}\,(\sqrt[4]{-1})^2;$$

io non moltiplico qui -1 per -1, perchè ricaderei sull'ambiguità notata nel n.° 173; ma osservo che il quadrato della radice quarta non è altra cosa che la radice quadrata, e viene allora

$$\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab} \times \sqrt{-1}.$$

3.° $$\sqrt[6]{-a} \times \sqrt[6]{-b} = \sqrt[6]{ab} \times (\sqrt[6]{-1})^2 = \sqrt[6]{ab} \times \sqrt[3]{-1}$$
$$= \sqrt[6]{ab} \times -1 = -\sqrt[6]{ab}.$$

Si troverebbero in questa maniera dei resultati alternativamente reali, ed immaginarî.

Del Calcolo degli esponenti frazionarî.

175. Allorchè si pongono in luogo de' radicali gli esponenti frazionarî, che loro corrispondono (132), l' applicazione immediata delle regole degli esponenti somministra i medesimi resultati, che danno i metodi usati nel calcolo dei radicali.

Infatti, se si trasformano le quantità

$$\sqrt[5]{a^3b^2}\,,\qquad \sqrt[5]{a^3c^2}$$

in

$$a^{\frac{3}{5}}\,b^{\frac{2}{5}}\,,\qquad a^{\frac{3}{5}}\,c^{\frac{2}{5}}\,,$$

avremo

$$\sqrt[5]{a^3b^2} \times \sqrt[5]{a^3c^2} = a^{\frac{3}{5}}\, b^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{3}{5}}\, c^{\frac{2}{5}} =$$

$$a^{\frac{3}{5}+\frac{3}{5}}\, b^{\frac{2}{5}}\, c^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{6}{5}}\, b^{\frac{2}{5}}\, c^{\frac{2}{5}};$$

quindi osservando che $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$, che in conseguenza

$$a^{\frac{6}{5}} = a^{1+\frac{1}{5}} = a \times a^{\frac{1}{5}} \text{ (25)},$$

e che $a^{\frac{1}{5}}\, b^{\frac{2}{5}}\, c^{\frac{2}{5}}$ equivale a $\sqrt[5]{ab^2c^2}$, verrà

$$\sqrt[5]{a^3b^2} \times \sqrt[5]{a^3c^2} = a\sqrt[5]{ab^2c^2};$$

resultato non solamente esatto, ma ancora ridotto alla sua più semplice espressione.

Sia l'esempio generale $\sqrt[m]{a^pb^q} \times \sqrt[n]{b^rc^s}$; i radicali proposti si trasformano in

$$a^{\frac{p}{m}}\, b^{\frac{q}{m}}, \quad b^{\frac{r}{n}}\, c^{\frac{s}{n}},$$

ed otterremo, secondo le regole degli esponenti (26)

$$a^{\frac{p}{m}}\, b^{\frac{q}{m}} \times b^{\frac{r}{n}}\, c^{\frac{s}{n}} = a^{\frac{p}{m}}\, b^{\frac{q}{m}+\frac{r}{n}}\, c^{\frac{s}{n}}.$$

Se si vuole adesso effettuar la somma delle frazioni $\frac{q}{m}$, $\frac{r}{n}$, fa di mestieri ridurle al medesimo denominatore; ed affine di dar dell'uniformità ai resultati, bisogna fare lo stesso anco sulle frazioni $\frac{p}{m}$, $\frac{s}{n}$: s'ottiene per questo mezzo

$$a^{\frac{np}{mn}}\, b^{\frac{nq+mr}{mn}}\, c^{\frac{ms}{mn}};$$

e passando ai radicali, si ha come nel n.° 171,

$$\sqrt[m]{a^pb^q} \times \sqrt[n]{b^rc^s} = \sqrt[mn]{a^{np}b^{nq+mr}c^{ms}}.$$

176. La divisione si effettua colla stessa semplicità: abbiasi, per esempio,

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}} = \frac{a^{\frac{3}{5}}\, b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}\, c^{\frac{1}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}\, c^{\frac{1}{5}}} \text{ (38)};$$

il che riducesi a

$$\frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}\,c^{\frac{1}{5}}}\,;$$

e passando ai radicali si ha

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}}=\sqrt[5]{\frac{b^2}{ac}}$$

In generale abbiamo

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb^q}}{\sqrt[n]{b^rc^s}}=\frac{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}}{b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}}=\frac{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}-\frac{r}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}}$$

e riducendo al medesimo denominatore gli esponenti frazionarî, per effettuare la sottrazione indicata, si trova

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb^b}}{\sqrt[n]{b^rc^s}}=\frac{a^{\frac{np}{mn}}b^{\frac{nq-mr}{mn}}}{c^{\frac{ms}{mn}}}=\sqrt[mn]{\frac{a^{np}b^{nq-mr}}{c^{ms}}}$$

È facil vedere che la riduzione degli esponenti frazionarî al medesimo denominatore fa lo stesso effetto che la riduzione dei radicali al midesimo grado, e conduce precisamente agli stessi resultati (171).

177. Egli è ancora evidente, per la regola del n.° 127, che

$$\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^n=\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^n=a^{\frac{np}{m}}=\sqrt[m]{a^{np}},$$

e per quella del n.° 129.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}}=\sqrt[n]{a^{\frac{p}{m}}}=a^{\frac{p}{mn}}=\sqrt[mn]{a^p}.$$

Il calcolo degli esponenti frazionarî è uno degli esempî più ragguardevoli dell' utilità dei segni allorchè dessi son bene scelti. L' analogìa, che regna tra gli esponenti frazionarî, e quelli che sono interi, rende la regole, che dobbiamo seguire nel calcolo di questi ultimi, applicabili a quelle degli altri, mentre che sono stati necessarî dei ragionamenti particolari per discoprir le regole del calcolo dei radicali, poichè il se-

gno$\sqrt{\ }$, che gli esprime, non ha alcun legame coll' operazione, che gli genera. Più c' inoltriamo nell' Algebra, più riconosconsi i numerosi vantaggi, che ha prodotti in questa scienza il simbolo degli esponenti immaginato da Descartes.

Teoria generale delle Equazioni.

178. L'equazioni del primo e del secondo grado, sono, a parlar propriamente, le sole, delle quali si abbia una soluzione completa; ma si sono scoperte nell'equazioni di un grado qualunque delle proprietà generali, le quali conducono a risolverle allorchè esse sono numeriche, ed offrono delle numerose conseguenze per le parti più elevate dell'Algebra. Queste proprietà dipendono da una forma particolare, sotto la quale può esser posta qualunque equazione.

Supponendola tanto generale quant'essa può essere per un grado qualunque, una equazione deve contenere tutte le potenze dell' incognita, da quella di questo grado fino alla prima inclusivamente, moltiplicate ciascuna per delle quantità cognite, e in oltre un termine tutto cognito.

L' equazione generale del quinto grado, per esempio, conterrà tutte le potenze dell' incognita dalla prima fino alla quinta inclusivamente; e, se vi sieno più termini affetti dalla potenza medesima dell' incognita, bisognerà concepirli riuniti in un solo, come lo abbiam fatto per l' equazioni di secondo grado nel n.° 108. Dipoi passeremo, come abbiam fatto nel medesimo numero, tutti i termini dell' equazione in un solo membro, l' altro sarà necessariamente eguale a zero; e renderemo il primo termine positivo cangiando, se sarà necessario, tutti i segni de' termini dell' equazione.

Avremo con questo mezzo un' espressione simile alla seguente:

$$nx^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0$$

nella quale bisogna osservare che le lettere n, p, q, r, s, t possono rappresentare tanto dei numeri negativi quanto dei numeri positivi; poi dividendo tutto per n, affine di non alsciare al primo termine che l' unità per coefficiente, e facendo

$$\frac{p}{n}=P,\ \frac{q}{n}=Q,\ \frac{r}{n}=R,\ \frac{s}{n}=S,\ \frac{t}{n}=T,$$

verrà

$$x^5+Px^4+Qx^3+Rx^2+Sx+T=0.$$

Da ora in avanti supporrò che siensi sempre preparate l' equazioni nel modo, che ho fatto adesso, e rappresenterò l' equazione generale di un grado qualunque per

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2} \; . \; . \; . \; . \; . +Tx+U=o.$$

La lacuna indicata dai punti si riempie allorchè si dà all'esponente n un valore particolare.

Qualunque quantità, o espressione, sì reale, che immaginaria, la quale posta in luogo dell' incognita x in una equazione, preparata come qui sopra, rende il primo membro eguale a zero, e per conseguenza sodisfà al problema, si chiama la *radice dell' equazione proposta*; ma siccome qui non si tratta di potenze, questa denominazione è più generale di quella, che sino al presente ho data alla parola *radice* (90, 129).

179. Ecco una proposizione analoga a quelle dei numeri 116, e 159., e che deve risguardarsi come fondamentale.

La radice di una equazione qualunque

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2} \; . \; . \; . \; . +Tx+U=o$$

essendo rappresentata da a, *il primo membro di questa equazione dividesi esattamente per il binomio* x—a.

Difatto, poichè a è un valore di x, abbiamo necessariamente

$$a^n+Pa^{n-1}+Qa^{n-2} \; . \; . \; . +Ta+U=o,$$

ed in conseguenza

$$U=-a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2} \; . \; . \; . \; . -Ta;$$

di maniera che l'equazione proposta è identicamente la stessa che

$$\left.\begin{matrix} x^n+Px^{n-1}+Q^{n-2} \; . \; . \; . \; . +T \\ -a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2} \; . \; . \; . \; . -T \end{matrix}\right\}=o,$$

e riducesi a

$$\left.\begin{matrix} x^n-a^n+P(x^{n-1}-a^{n-1})+Q(x^{n-2}-a^{n-2} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . +T(x-a \end{matrix}\right\}=o.$$

Le quantità

$$x^n-a^n, \; x^{n-1}-a^{n-1}, \; x^{n-2}-a^{n-2}, \; . \; . \; x-a,$$

essendo tutte divisibili per $x-a$ (158), è evidente che il primo membro della equazione proposta avrà tutti i suoi termini divisibili per questa quantità, e sarà in conseguenza divisibile per $x-a$, come richiedesi dall'enunciato della proposizione (*).

(*) *D' Alembert dimostra la medesima Proposizione nel modo, che segue.*

Se si concepisce che il primo membro dell' equazione proposta sia diviso per x—a, *e che l' operazione sia stata spinta fino a che non sieno esauriti tutti i termini affetti da* x, *il*

180. Per formare il quoziente, altro non si deve fare che sostituire in luogo delle quantità,

$$x^n-a^n,\ x^{n-1}-a^{n-1},\ x^{n-2}-a^{n-2},\ \ldots\ldots\ x-a$$

i quozienti, che esse danno allorchè si dividono per $x-a$; e che sono respettivamente

$$\begin{array}{r}
x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\ \ldots\ldots\ +a^{n-1},\\
x^{n-2}+a\,x^{n-3}\ \ldots\ldots\ +a^{n-2},\\
x^{n-3}\ \ldots\ldots\ +a^{n-3},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+1.
\end{array}$$

Ordinando il resultato per rapporto alle potenze di x, troveremo

$$\begin{array}{r}
x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\ \ldots\ldots\ +a^{n-1}\\
+Px^{n-2}+Pax^{n-3}\ \ldots\ldots\ +Pa^{n-2}\\
+Qx^{n-3}\ \ldots\ldots\ +Qa^{n-3}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+T.
\end{array}$$

181. È visibile, dietro alle sole regole della divisione, che il primo membro dell'equazione

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+\text{ec.}=0$$

essendo diviso per $x-a$, darà un quoziente della forma

$$x^{n-1}+P'x^{n-2}+Q'x^{n-3}+\text{ec.},$$

P', Q', ec. indicando delle quantità cognite, differenti da P, Q, ec. ec.: avremo dunque

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}=(x-a)(x^{n-1}+P'x^{n-2}+\text{ec.});$$

e seguendo l'osservazione del num.° 116, l'equazione proposta si verificherà in due maniere, cioè, facendo

$$x-a=0,\ \text{ovvero}\ x^{n-1}+P'x^{n-2}+\text{ec.}=0.$$

---

resto; se vi sarà, non potrà contenere x. *Rappresentando questo resto per* R, *e chiamando* Q *il quoziente qualunque, a cui saremo pervenuti, avremo necessariamente*

$$x^n+Px^{n-1}\ \ldots\ +\text{ec.}=Q(x-a)+R.$$

Ora, allorchè invece di x *si sostituisce* a, *il primo membro va a zero, poichè* a *è il vero valore di* x; *il termine* Q(x—a) *va parimente a zero per motivo del fattore* x=a, *che diviene zero; si deve dunque avere* R=0; *e ciò indipendentemente dalla sostituzione; poichè questo resto non contenendo* x, *la sostituzione non può effettuarvisi, ed anco dopo conserva lo stesso valore, che egli avea per l'avanti.*

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+\text{ec.}$$

è divisibile esattamente per x—a.

Se adesso l'equazione

$$x^{n-1}+P'x^{n-2}+\text{ec.}=0$$

ha una radice b, il suo primo membro sarà divisibile per $x-b$; avremo ancora

$$x^{n-1}+P'x^{n-2}+\text{ec.}=(x-b)(x^{n-2}+P''x^{n-3}+\text{ec.});$$

ed in conseguenza

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}=(x-a)(x-b)(x^{n-2}+P''x^{n-3}+\text{ec.});$$

l'equazione proposta potrà dunque verificarsi in tre maniere, cioè facendo

$x-a=0$, ovvero $x-b=0$, ovvero $x^{n-2}+P''x^{n-3}+\text{ec.}=0$.

Se l'ultima di queste equazioni ha una radice c, il suo primo membro si decomporrà pure in due fattori

$$(x-c)(x^{n-3}+P'''x^{n-4}+\text{ec.})=0,$$

ed avremo

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}$$
$$=(x-a)(x-b)(x-c)(x^{n-3}+P'''x^{n-4}+\text{ec.});$$

dal che si fa manifesto che l'equazione proposta potrà verificarsi in quattro maniere, cioè, facendo

$x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x^{n-3}+P'''x^{n-4}+\text{ec.}=0$.

E continuando lo stesso ragionamento, otterremo successivamente dei fattori de' gradi

$$n-4,\ n-5,\ n-6,\ \text{ec};$$

e se ciascuno di questi fattori, eguagliato a zero, è suscettibile d'una radice, il primo membro dell'equazione proposta sarà ridotto alla forma

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ \ldots\ (x-l),$$

e vale a dire, sarà decomposto in tanti fattori di primo grado quante saranno le unità dell'esponente n del suo grado. L'equazione

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}=0$$

potrà dunque verificarsi in n maniere, cioè, facendo $x-a=0$, oppure $x-b=0$, oppure $x-c=0$, ovvero $x-d=0$, ovvero finalmente $x-l=0$.

Fa di mestieri osservare che queste equazioni non debbon essere riguardate come vere che alternativamente, e che si caderebbe in delle manifeste contradizioni se si supponesse che le medesime avessero luogo simultaneamente. Difatto, da $x-a=0$ ricavasi $x=a$, laddove che $x-b=0$ conduce a $x=b$; conseguenze, le quali non possono insieme accordarsi allorchè a, e b sono quantità diseguali.

182. Il primo membro dell' equazione proposta

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}=0$$

essendo decomposto in n fattori di primo grado,

$$x-a, x-b, x-c, x-d, \ldots x-l,$$

non potrà essere divisibile per alcun' altra espressione di questo grado. Infatti, se la divisione per un binomio $x-\alpha$, differente dai primi, fosse possibile, avrebbesi

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}=(x-\alpha)(x^{n-1}+px^{n-2}+\text{ec.}),$$

ed in conseguenza

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-l)=(x-\alpha)(x^{n-1}+px^{n-2}+\text{ec.}):$$

ora, cangiando x in α si ottiene

$$(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)(\alpha-d)\ldots(\alpha-l)=(\alpha-\alpha)(\alpha^{n-1}+p\alpha^{n-2}+\text{ec.});$$

il secondo membro svanisce a causa del fattore nullo $\alpha-\alpha$; ma non è lo stesso del primo, ch'è il prodotto di fattori tutti differenti da zero, fino a che α differisce da ciascuna delle radici a, b, c, d, ... l; la supposizione non è dunque vera; dunque *una equazione di un grado qualunque non può ammettere più divisori binomî di primo grado, di quel che vi sieno unità nell' esponente del suo grado, e non può avere in conseguenza un maggior numero di radici* (*).

183. Riguardando una equazione come il prodotto di un numero di fattori

$$x-a, \; x-b, \; x-c, \; x-d, \text{ ec.}$$

eguale all' esponente del suo grado, essa prenderà la forma del prodotto indicato nel n.° 135, con questa modificazione però, che i termini saranno alternativamente positivi, e negativi.

Se ci limitiamo, per esempio, a quattro fattori, avremo

$$\begin{array}{llll} x^4-ax^3+abx^2-abc\,x+abcd=0. \\ \quad\;\, -bx^3+acx^2-abdx \\ \quad\;\, -cx^3+adx^2-acdx \\ \quad\;\, -dx^3+bcx^2-bcdx \\ \qquad\qquad +bdx^2 \\ \qquad\qquad +cdx^2 \end{array}$$

(*) *Questa dimostrazione, molto più semplice di quella, che aveva data nelle Edizioni precedenti, è ricavata dagli annali* di Matematiche *pubblicati dal Sig. Gergonne* (Vedete *il T. IV. pag.* 209,210, nota).

Egli è a proposito di osservare che ciò accade perchè il binomio $x-\alpha$ *è* primo co' *fattori* $x-a$, $x-b$, *ec. e che per conseguenza esso non può dividere il loro prodotto; proposizione, che si estende ad ogni polinomio della forma* $x^m+Px^{m-1}+$ *ec. Sostituendo questi polinomî a' numeri, ne' ragionamenti del n.° 97, si dimostrerà facilmente che* ogni polinomio che divida il prodotto di due polinomî A, e B, ec. che è primo con uno di questi polinomî, divide necessariamente l' altro.

I secondi termini dei binomî $x-a$, $x-b$, $x-c$, ec. essendo le radici dell' equazione, prese con un segno contrario, le proprietà osservate nel n.° 135., e dimostrare in generale nel numero 136., avranno luogo per il caso attuale nella maniera seguente:

Il coefficiente del secondo termine, preso con un segno contrario, sarà la somma delle radici;

Il coefficiente del terzo termine sarà la somma dei prodotti delle radici moltiplicate due a due:

Il coefficiente del quarto termine, preso con un segno contrario sarà la somma dei prodotti delle radici, moltiplicate tre a tre; e così in seguito, osservando di cangiare i segni de' coefficienti dei termini situati in posto pari.

L'ultimo termine, soggetto come gli altri alla stessa legge, *sarà il prodotto di tutte le radici.*

Eguagliando, per esempio, a zero il prodotto dei tre fattori

$$x-5\,,\ x+4\,,\ x+3$$

formeremo l' equazione

$$x^3+2x^2-23x-60=0,$$

le radici della quale saranno

$$+5\,,\ -4\,,\ -3:$$

avremo per la loro somma

$$5-4-3=-2:$$

per quella dei loro prodotti due a due

$$+5\times-4+5\times-3-4\times-3=-20-15+12=-23,$$

e per il prodotto delle tre radici

$$+5\times-4\times-3=60$$

Questo è ciò che si dedurrebbe ancora dai coefficienti 2, -23, -60, osservando di cangiare i segni di quelli del secondo, e del quarto termine.

Se si eguaglia a zero il prodotto dei fattori

$$x-2\,,\ x-3\,,\ \text{e}\ x+5,$$

l' equazione resultante

$$x^3-19x+30=0,$$

mancando del termine affetto da x^2, potenza immediatamente inferiore a quella del primo termine, *manca del secondo termine*, e ciò perchè la somma delle radici, la quale, presa con il segno contrario, forma il coefficiente di questo termine, e qui

$$2+3-5,$$

ovvero zero; oppure, in altri termini, perchè la somma delle radici positive è eguale a quella delle negative (*).

(*) *Potrebbesi credere che per iscoprir le radici di un' equazione qualunque del quarto grado*

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0,$$

fosse sufficiente paragonarla col prodotto formato nel n.° 183, osservando di eguagliare le quantità, le quali moltiplicano nell' una, e nell' altra le medesime potenze di x; *ed è per questa ragione che la maggior parte degli Autori elementari pensano di dimostrare che* una equazione di un grado qualunque è il prodotto di tanti fattori semplici quante son le unità, che si trovano nell' esponente del suo grado: *vedremo da ciò, che segue, che il loro ragionamento è falso. Io non ho concluso questa proposizione se non che condizionalmente nel num.° 182, poichè sarebbe necessario, per affermarla positivamente, dimostrare che una equazione di un grado qualunque ha una radice o reale o immaginaria, lo che non sembra facile a farsi negli Elementi, e che per buona sorte non è allor necessaria; si possono d' altronde vedere nel* Complemento *le riflessioni, che ho riportate su questo soggetto.*

Formando l' equazioni

$$\begin{aligned} -a-b-c-d &= p \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd &= q \\ -abc-abd-acd-bcd &= r \\ abcd &= s \end{aligned}$$

per ricavarne i valori delle lettere a, b, c, d, *i quali sarebbero le radici dell' equazione proposta, il calcolo sarebbe complicatissimo se si volesse impiegare per la determinazione delle incognite* a, b, c, d, *il metodo del num.° 78; ma, se si moltiplica la prima dell' equazioni qui sopra per* a^3, *la seconda per* a^2, *la terza per* a, *e si sommino questi tre prodotti con la quarta, membro a membro avremo*

$$-a^4=pa^3+qa^2+ra+s,$$

dalla quale conchiudesi, per mezzo di una semplice trasposizione,

$$a^4+pa^3+qa^2+ra+s=0.$$

Questa equazione non contiene altro che a, *ma dessa è interamente simile alla proposta: la difficoltà di ottenere* a *è dunque la stessa di quella per ottenere* x.

Così, come lo ha detto Castillon (Mem. di Berlino, an-

184. Quando si considera una equazione come formata dal prodotto di più fattori semplici, o di primo grado, si prova (182) che essa non può averne che un numero espresso dell' esponente *a* del suo grado; ma, se si combinano questi fattori due a due, si formeranno delle quantità di secondo grado, le quali pure saranno fattori dell' equazione proposta, e il cui numero sarà espresso da

$$\frac{n(n-1)}{1\,.\,2} \quad (140).$$

Per esempio il primo membro dell' equazione

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 &+ abx^2 - abcx + abcd = 0, \\ -bx^3 &+ acx^2 - abdx \\ -cx^3 &+ adx^2 - acdx \\ -dx^3 &+ bcx^2 - bcdx \\ &+ bdx^2 \\ &+ cdx^2 \end{aligned}$$

---

no 1789: (« Si prova bene in tutti i Corsi di Algebra che » per mezzo del prodotto di più binomî semplici formasi un' » equazione di qualunque grado si voglia, ma non si è mai » fatto vedere che una equazione formata per mezzo della » moltiplicazione di più binomî semplici possa aver dei coef- » ficienti tali quali vorrannosi ».

Se, in vece di moltiplicare le tre prime equazioni in a, b, c, d *per* a^3, a^2, *e* a *si moltiplicassero respettivamente per* b^3, b^2, *e* b, *ovvero per* c^3, c^2, *e* c, *oppure per* d^3, d^2, *e* d, *e che si sommassero pure i prodotti con la quarta, avrebbesi nel primo caso*

$$-b^4 = pb^3 + qb^2 + rb + s,$$

nel secondo

$$-c^4 = pc^3 + qc^2 + rc + s,$$

nel terzo

$$-d^4 = pd^3 + qd^2 + rd + s;$$

dal che segue che siamo condotti alla stessa equazione tanto per aver a, *che per aver* b, *ec. Difatto; le quantità* a, b, c, d *essendo tutte disposte della stessa maniera in ciascuna equazione, non vi è ragione alcuna, mercè della quale una sia determinata per qualche operazione differente da quelle, che determinano l' altre; e in generale, se; nella ricerca di più quantità incognite, siamo obbligati di impiegar per ciascuna i medesimi ragionamenti, le medesime operazioni, e le medesime quantità cognite, tutte queste quantità saranno necessariamente radici di una stessa equazione.*

essendo il prodotto di

$$(x-a)\times(x-b)\times(x-c)\times(x-d),$$

può decomporsi in fattori di secondo grado nelle sei maniere seguenti:

$$(x-a)\ (x-b)\ \times\ (x-c)\ (x-d),$$
$$(x-a)\ (x-c)\ \times\ (x-b)\ (x-d),$$
$$(x-a)\ (x-d)\ \times\ (x-b)\ (x-c),$$
$$(x-b)\ (x-c)\ \times\ (x-a)\ (x-d),$$
$$(x-b)\ (x-d)\ \times\ (x-a)\ (x-c),$$
$$(x-c)\ (x-d)\ \times\ (x-a)\ (x-b);$$

e ne resulta che un' equazione di quarto grado può aver sei divisori di secondo.

Combinando i fattori semplici tre a tre, si formeranno i divisori di terzo grado della proposta; per un' equazione del grado n il numero ne sarà

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3},$$

e così di seguito.

Dell' Eliminazione tra l' Equazioni dei gradi superiori al primo.

185. La regola del n.° 78, oppure il metodo del n.° 84 serve sempre per eliminare tra due equazioni un' incognita, la quale non passi il primo grado, qualunque sia d' altronde quello dell' altre incognite; e quando ancora l' incognita non si trovasse al primo grado se non che in una dell' equazioni proposte, la regola del n.° 78 applicherebbesi nella stessa maniera.

Se si hanno, per esempio, l' equazioni

$$ax^2+bxy+cy^2=m^2;$$
$$x^2+xy=n^2,$$

prenderemo dalla seconda il valore di y, il quale sarà

$$y=\frac{n^2-x^2}{x};$$

sostituendo questo valore, ed il suo quadrato, in luogo di y, e y^2 nella prima equazione, otterremo un resultato in x solamente.

186. Se l' equazioni proposte fossero ambedue di secondo grado per rapporto all' una, e all' altra incognita, non si potrebbe applicare il metodo precedente se non che risolvendo una delle Equazioni o per rapporto a x, oppure per rapporto a y.

Sieno, per esempio, l' equazioni

$$ax^2+bxy+cy^2=m^2$$
$$x^2+y^2=n^2$$

la seconda somministra

$$y=\pm\sqrt{n^2-x^2};$$

sostituendo nella prima questo valore di y, e del suo quadrato; otterremo

$$ax^2\pm bx\sqrt{n^2-x^2}+c(n^2-x)=m^2.$$

L' oggetto proposto sembra sodisfatto, poichè questo resultato non contiene altrimenti l' incognita y; ma non possiamo risolvere l' equazione in x senza ridurla a una forma razionale, facendo cioè sparire il radicale, sotto del quale si trova l' incognita.

È facile vedere che, se il radicale fosse solo in un membro, si farebbe esso sparire alzando questo membro al quadrato; riunendo dunque, per mezzo della trasposizione dei termini $\pm bx\sqrt{n^2-x^2}$, e m^2, tutti i termini razionali in un solo membro, avremo

$$ax^2+c(n^2-x^2)-m^2=\mp bx\sqrt{n^2-x^2},$$

e prendendo il quadrato di ciascon membro, formeremo l' equazione

$$\left.\begin{array}{l} a^2x^4+c^2(n^2-x^2)^2+m^4 \\ +2acx^3(n^2-x^2)-2am^2x^2-2cm^2(n^2-x^2) \end{array}\right\}=b^2x^2(n^2-x^2),$$

la qual più non contiene radicali.

Il metodo, che abbiamo impiegato per fare sparire il radicale, debb' essere osservato, perchè si ha spesso occasione di servirsene; esso consiste nell' *isolare il radicale, che si vuol far sparire, e nell' alzare in seguito i due membri dell' equazione proposta alla potenza indicata dal grado di esso radicale.*

187. La complicazione di questo metodo, la quale diviene grandissima allorchè vi sono più radicali, unita alla difficoltà di risolvere una dell' equazioni proposte per rapporto a una dell' incognite, difficoltà che spesso è insormontabile nello stato attuale dell' Algebra, ha fatto cercare un metodo, per mezzo del quale si può senza di ciò effettuare l' eliminazione; di tal maniera che la risoluzione dell' equazioni fosse l' ultima delle operazioni, che esige la soluzione dei problemi.

Per render più facili i calcoli, si pongono l' equazioni a due incognite sotto la forma di equazioni a una sola, non lasciando in mostra che quella, la quale vogliasi eliminare. Se si avesse per esempio,

$$x^2+axy+bx=cy^2+dy+e\,,$$

si trasporrebbero tutti i termini in un solo membro, ordinandoli per rapporto a x; otterrebbesi

$$x^2+(ay+b)\,x-cy^2-dy-e=0$$

e facendo, per abbreviare,

$$ay+b=P\,,\quad -cy^2-dy-e=Q\,,$$

si avrebbe

$$x^2+Px+Q=0.$$

L'equazione generale del grado m a due incognite deve contenere tutte le potenze di x, e di y, che non superano questo grado, come pure i prodotti, nei quali la somma degli esponenti di x, e y non si alza al di sopra di m; possiamo dunque rappresentare nel modo seguente l'equazione generale del grado m a due incognite:

$$x^m+(a+by)x^{m-1}+(c+dy+ey^2)x^{m-2}+(f+gy+hy^2+ky^3)x^{m-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(p+qy+ry^2\ldots+uy^{m-1})x+p'+q'y+r'y^2\ldots+v'y^m=0.$$

Non abbiam dato coefficiente a x^m in questa equazione, perchè si può sempre, mediante la divisione, liberare del suo moltiplicatore qualunque termine che si voglia di una equazione; e se facciamo

$$a+by=P,\, c+dy+ey^2=Q,\, f+gy+hy^2+ky^3=R\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p+qy\ldots+uy^{m-1}=T,\, p'+q'y\ldots+v'y^m=U\,,$$

l'equazione qui sopra prenderà la forma

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ldots+Tx+U=0.$$

188. Sarà bene osservare che l'eliminazione di x tra due equazioni di secondo grado

$$x^2+Px+Q=0\,,\quad x^2+P'x+Q'=0.$$

può effettuarsi immediatamente togliendo la seconda equazione dalla prima. Questa operazione somministra

$$(P-P')x+Q-Q'=0\,;$$

da cui ricavasi

$$x=\frac{Q-Q'}{P-P'}\,;$$

sostituendo questo valore in una delle due equazioni proposte, nella prima, per esempio, troveremo

$$\frac{(Q-Q')^2}{(P-P')^2}-\frac{P(Q-Q')}{P-P'}+Q=0\,;$$

facendo sparire i denominatori, avremo

$$(Q-Q')^2-P(P-P')(Q-Q')+Q(P-P')^2=0\ ;$$

e ponendo fuori il fattore $P-P'$ comune ai due ultimi termini, otterremo

$$(Q-Q')^2+(P-P')(PQ'-QP')=0.$$

Altro non resterà ora da fare che sostituire per P, Q, P', e Q' i valori particolari al caso, che qui si esamina.

189. Prima di passare più avanti dimostrerò in qual maniera si riconosca che il valore di una qualunque delle incognite sodisfà nel medesimo tempo alle due equazioni proposte. Affine di fissar meglio le idee, prenderò un esempio particolare, ma il ragionamento non sarà meno generale.

Sieno l' equazioni

$$x^3+3x^2y+3xy^2-98=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)\ ,$$
$$x^2+4xy-2y^2-10=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)\ ,$$

che supporrò date da un problema, in virtù del quale dobbiamo avere $y=3$.

Per verificare quest' ultima asserzione, fa di mestieri primieramente sostituire 3 in luogo di y nell'equazioni proposte, il che dà

$$x^3+9x^2+27x-98=0\ .\ .\ .\ (a)\ ,$$
$$x^2+12x-28=0\ .\ .\ .\ (b)\ ;$$

equazioni, le quali debbono ammettere il medesimo valore di x se quello, che abbiamo assegnato per y, sia vero. Se s'indica il valore di x per α, bisognerà, in virtù di ciò, che è stato provato nel numero 179, che l' equazione (a), e l'equazione (b) sieno divisibili ambedue per $x-\alpha$; esse avran dunque un divisore comune, del quale $x-\alpha$ deve far parte. Infatti trovasi per questo comun divisore $x-2$ (48): abbiamo dunque $\alpha=2$. Così il valore di $y=3$ conviene al problema, e corrisponde a $x=2$.

Se restasse qualche dubbio che il comun divisore dell'equazioni (a), e (b) dovesse dare il valore di x, si toglierebbe osservando che queste equazioni riduconsi alle seguenti

$$(x^2+11x+49)(x-2)=0\ ,$$
$$(x+14)(x-2)=0\ ,$$

dalle quali si fa manifesto ch' esse sono sodisfatte allorchè vi si pone 2 in luogo di x.

190. Il mezzo, che ho indicato per trovare il valore di x quando quello di y è cognito, può applicarsi immediatamente all' eliminazione di x.

Infatti quando si opera sull'equazioni (1) e (2), come per

cercare s'esse hanno un comune divisore in x, invece di trovarne uno, si arriva ad un resto il quale altro non contiene che l'incognita y e dei numeri dati; ed è evidente che se vi si ponesse in luogo di y il suo valore 3, dovrebbe il detto resto andare a zero, poichè, mediante la stessa sostituzione, le equazioni (1) e (2) divengono l'equazioni (a) e (b), le quali hanno un comune divisore. Egualiando dunque questo resto a zero esprimeremo la condizione, alla quale debbono sodisfare i valori di y, perchè le due equazioni date possano ammettere nel medesimo tempo un stesso valore per x.

La Tavola qui unita contiene le particolarità delle operazioni relative all'equazioni.

$$x^3+3x^2y+3xy^2-98=0\,,$$
$$x^2+4xy-2y^2-10=0\,,$$

delle quali mi sono occupato nel numero precedente: trovasi per l'ultimo divisore

$$(9y^2+10)x-2y^3-10y-98\,;$$

ed il resto essendo eguagliato a zero dà

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0:$$

equazione, la quale ammette, oltre al valore $y=3$ qui sopra indicato, tutti gli altri valori di y, dei quali è suscettibile il problema proposto, e che si chiama per questa ragione *equazione finale*.

$$\frac{x^3+3x^2y+3y^2x-98}{-x^3-4x^2y+2y^2x+10x} \;\Big|\; \frac{x^2+4xy-2y^2-10}{x-y}$$

$$-\,x^2y+5y^2x+10x-98$$

$$+\,x^2y+4y^2x-2y^3-10y$$

1.° Resto.... $+(9y^2+10)x-2y^3-10y-98$

$$x^2+4xy-2y^2-10 \;\Big|\; \frac{(9y^2+10)x-2y^3-10y-98}{(9y^2+10)x-2y^3-10y-98}$$

ovvero $(9y^2+10)x^2+36xy^3-18y^4-110y^2-100$
$+40xy$

$-(9y^2+10)x^2+2xy^3+98x$
$+10xy$ $\qquad x+38y^3+50y+98$

$+38xy^3-18y^4-110y^2-100$
$+50xy$
$+98x$

ovvero $(38y^3+50y+98)(9y^2+10)x-162y^6-1170y^4-2000y^2-1000$

$-(38y^3+50y+98)(9y^2+10)x+76y^6+480y^4+5920y^3-500y^2+5880y+9604$

2.° Resto............................... $-86y^6-690y^4+3920y^3-1500y^2+5880y+9604$

Eguagliando questo resto a zero, dividendo tutti i suoi termini per 2, e rendendo il primo termine positivo, si ottiene

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4802=0.$$

Il resto qui sopra essendo annullato, il penultimo resto diventa il divisore comune delle due equazioni proposte, di maniera che eguagliandolo a zero, dà il valore di x allorchè ci si pone quello di y. Sapendo, per esempio, che $y=3$, porremo questo numero nella quantità

$$(9y^2+10)x-2y^3-10y-98,$$

la quale eguaglieremo in seguito a zero, ed otterremo l'equazione di primo grado

$$91x-182=0, \text{ dalla quale ricavasi } x=2.$$

191. L'operazione, che ho adesso eseguita sopra dell'equazioni particolari, può applicarsi egualmente ad equazioni qualunque

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3} \ldots\ldots +Tx+U=0,$$
$$x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+R'x^{n-3} \ldots\ldots +Y'x+Z'=0.$$

nelle quali la seconda incognita è contenuta nei coefficienti P, Q, ec., P', Q'. ec. L'eliminazione dell' incognita x si effettuerà cercando, come qui sopra, il massimo divisor comune ai primi membri di queste equazioni, ed eguagliando a zero il resto indipendente da x.

Il calcolo, in generale assai complicato, può nei casi particolari ricevere più simplificazioni utili; ma queste particolarità sarebbero troppo lunghe per potermene qui occupare; esse sono d'altronde assai facili a ritrovarsi. Supporrò dunque che nel corso dell' operazione non si sopprima alcun fattore in y, che fosse comune a tutti i termini d' un medesimo resto, e mi limiterò a spiegare i resultati, che potrebbero recare qualche imbarazzo. Primieramente può accadere che il valor di y renda nullo per se stesso il penultimo resto; allora il resto precedente, ovvero quello, nel quale x trovasi al secondo grado, diverrà il divisore comune delle due equazioni proposte. Ponendovi il valore di y, e dipoi eguagliandolo a zero, avrebbesi un'equazione di secondo grado con la sola x, i due valori della quale corrisponderebbero al valor cognito di y. Se questo valore riducesse pure a zero il resto di secondo grado, farebbe mestieri ricorrere al precedente, ove x ascenderebbe al terzo grado, perchè desso, in questo caso, sarebbe il divisore comune delle due equazioni proposte; ed il valore di y corrisponderebbe a tre valori di x. In generale, sarà necessario risalire fino a un resto, il quale non si distrugga per la sostituzione del valore di y.

Può ancora accadere che non si trovi resto, ovvero, che il resto non contenga che quantità cognite.

Nel primo caso, le due equazioni hanno un divisore comune senz'alcuna determinazione di y; esse son dunque della forma:

$$P \times D = 0, \qquad Q \times D = 0,$$

zione in y solo, poichè tutti i valori, i quali fanno acquistare a queste equazioni un comune divisore, appartengono necessariamente alla quistione, e gli altri debbono essere esclusi. Si comprende ancora che l'equazione finale potrebbe divenire incompleta se si sopprimesse nel corso del calcolo qualche fattore in y; ma tutte queste circostanze, le quali sono state discusse dal Sig. Bret nel Fascicolo 15mo del *Giornale della Scuola Politecnica*, e dal Sig. Lefebure, nel n.° 3 del 2.° Volume della *Corrispondenza* riguardante la medesima scuola rendono poco comodo nella pratica l'impiego del metodo indicato qui sopra, e debbono far preferire ad esso quello che, seguendo Eulero, io passò ad esporre nel numero consecutivo (*).

193. Sieno le due equazioni

$$x^3+Px^2+Qx+R=0,$$
$$x^4+P'x^3+Q'x^2+R'x+S'=0;$$

rappresentando per $x-\alpha$ il fattore, che debb' esser comune all'una, ed all'altra, allorchè y è convenevolmente determinato, potremo considerare la prima come il prodotto di $x-\alpha$ per il fattore di secondo grado x^2+px+q, e la seconda come il prodotto di $x-\alpha$ per il fattore di terzo grado $x^3+p'x^2+q'x+r'$, p e q, p', q' e r' essendo coefficienti indeterminati: avremo dunque

$$x^3+Px^2+Qx+R=(x-\alpha)(x^2+px+q),$$
$$x^4+P'x^3+Q'x^2+R'x+S'=(x-\alpha)(x^3+p'x^2+q'x+r').$$

Eliminando il binomio $(x-\alpha)$ come un'incognita al primo grado (84), troveremo

$$(x^3+Px^2+Qx+R)(x^3+p'x^2+q'x+r')=$$
$$(x^4+P'x^3+Q'x^2+R'x+S')(x^2+px+q).$$

(*) *Si può facilmente concludere da ciò, che precede, che la ricerca dell'equazione finale ricavata da due equazioni a due incognite, è, in generale, un problema determinato: ma la stessa equazione finale può corrispondere ad un' infinità di sistemi di equazioni a due incognite. Invertendo il metodo, per mezzo del quale si ottiene il massimo comun divisore di due quantità, sarebbe estremamente facile formare a piacimento siffatti sistemi; ma questo problema ha pochissimo uso nelle Matematiche elementari, per non doversi qui trattenere, e per non caricarsi delle osservazioni minute, alle quali esso potrebbe dar luogo. Questi son oggetti, che bisogna lasciare alla sagacità dei Lettori intelligenti, i quali non mancano mai di trovarli da loro medesimi, se qualche circostanza fa ad essi sentirne il bisogno.*

Questo resultato dee verificarsi senza che vi sia bisogno di assegnare a x alcun valore particolare; questo è ciò che non può accadere senza che il primo membro non sia composto dei medesimi termini del secondo: bisognerà dunque, dopo di avere effettuato le moltiplicazioni indicate, eguagliare tra loro i coefficienti, che ciascuna potenza di x avrà nei due membri, ed otterremo in questa maniera l' equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} P+p'&=P'+p & Rp'+Qq'+Pr'&=S'+Rp'+Qq' \\ Q+Pp'+q'&=Q'+P'p+q & Rq'+Qr'&=S'p+R'q \\ R+Qp'+Pq'+r'&=R'+Q'p+Pq' & Rr'&=Sq. \end{aligned}$$

Siccome queste equazioni sono in numero di sei, e non contengono che cinque quantità indeterminate, cioè p, q, p', p', e r', potremo eliminare queste quantità, le quali non superano il primo grado, ed arrivare ad un' equazione, la quale altro non contenendo che le quantità P, Q, R, P', Q', R', e S', esprimerà una condizione, senza la quale non potrebbesi sodisfare a quelle del problema, e sarà in conseguenza l' equazione finale in y (*).

Se questa equazione si trovasse identica ne seguirebbe che

(*) *Il metodo di Eulero, che ora ho esposto, riducesi a moltiplicare ciascuna dell' equazioni proposte per un fattore, i cui coefficienti sieno indeterminati, ad eguagliare i prodotti, e a disporre dei coefficienti in modo che i termini affetti dall' incognita* x *si distruggano tra loro. In questa maniera l' ha presentato nella sua* Introduzione all' Analisi degli Infiniti. *In detta Opera* k *denotando l' esponente del grado dei prodotti, quello dei fattori si trova* k−m *per l' equazione del grado* m, *e* k−n *per quella del grado* n. *Il primo termine di ciascuno di questi fattori avendo l' unità per coefficiente, uno contiene* k−m *coefficienti indeterminati, e l' altro* k−n. *La somma dei prodotti contiene un numero* k *di termini affetti da* x; *ma non bisogna distruggerne che* k−1, *perchè, quello, che contiene la più alta potenza di* x, *svanisce per se medesimo. Segue da ciò che il numero totale* 2k−m−n *dei coefficienti indeterminati debbe esser eguale a* k−1, *e che in conseguenza* k=m+n−1; *dobbiam dunque moltiplicare l' equazione del grado* m *per un fattore del grado* n−1, *quella del grado* n *per un fattore del grado* m−1, *ed eguagliare i prodotti termine a termine; regola simile a quella, che abbiamo data nel Testo. È bene osservare che questo primo metodo di Eulero contiene il germe di quello, che Bezout ha sviluppato nella sua* Teoria dell'Equazioni algebriche.

l'equazioni proposte avrebbero almeno un fattore della forma $x-\alpha$, qualunque fosse y, e se al contrario l'equazione finale non contenesse che quantità cognite, l'equazioni proposte sarebbero contraddittorie.

Allorchè l'equazione finale può aver luogo si ottiene il fattore $x-\alpha$ dividendo la prima dell'equazioni proposte per il polinomio x^2+px+q; si trova per quoziente

$$x+P-p,$$

e si trascura il resto, perchè esso deve necessariamente esser nullo quando vi si pone per y un valore ricavato dall'equazione finale. Eguagliando a zero il quoziente predetto, se ne ricava

$$x=p-P,$$

e questo valore di x sarà cognito, o almeno esponente in y, se invece di p si ponga il suo valore dedotto dalle equazioni di primo grado formate qui sopra.

Questa medesima espressione prenderà in generale una forma frazionaria, di maniera che avremo $x=\frac{M}{N}$, ovvero $Nx-M=0$; e si vede allora che i valori di y, farebbero sparire simultaneamente M e N, verificherebbero l'equazione precedente indipendentemente da x; e ciò dipenderebbe da questo che, per tali valori, le due equazioni proposte acquisterebbero un fattore comune di un grado più elevato del primo. Non sarebbe difficile di risalire fino alle condizioni immediate, che indicano questa circostanza; ma simili particolarità passano i limiti, che io mi ho prescritti in questo Trattato.

194. Sieno primieramente, per esempio, l'equazioni

$$x^2+Px+Q=0, \qquad x^2+P'x+Q'=0;$$

i fattori, i quali moltiplicano $x-\alpha$, saranno qui di primo grado, ovvero $x+p$, e $x+p'$ solamente: avremo dunque

$$R=0,\ R'=0,\ S'=0,\ q=0,\ q'=0,\ r'=0,$$

e si otterrà

$$\left.\begin{array}{l} P+p'=P'+p \\ Q+Pp'=Q'+P'p \\ Qp'=Q'p\end{array}\right\}, \quad \text{ovvero} \quad \left\{\begin{array}{l} p-p'=P-P' \\ P'p-Pp'=Q-Q' \\ Q'p-Qp'=0.\end{array}\right.$$

Ricaveremo dalle due prime equazioni

$$p=\frac{(P-P')P-(Q-Q')}{P-P'},$$

$$p'=\frac{(P-P')P'-(Q-Q')}{P-P'}.$$

Sostituendo questi valori nella terza, ne risulterà

$$(P-P')Q'P-(Q-Q')Q'=(P-P')P'Q-(Q-Q')Q,$$

ovvero $(P-P')(PQ'-QP')+(Q-Q')^2=0$.

Adesso se nell' equazione

$$x=p-P$$

si pone per p il suo valore trovato di sopra, ne resulterà, come nel num.° 188,

$$x=-\frac{Q-Q'}{P-P'}.$$

195. Affine di dare al Lettore l' occasione di esercitarsi, indicherò i calcoli da eseguire per eliminare x dalle due equazioni

$$x^3+Px^2+Qx+R=0, \quad x^3+P'x^2+Q'x+R'=0.$$

In questo caso avremo

$$S'=0, \quad r'=0 \ (193),$$

ed otterremo queste cinque equazioni

$$\begin{aligned} P+p' &= P'+p, \\ Q+Pp'+q &= Q'+P'p+q, \\ R+Qp'+Pq' &= R'+Q'p+P'q; \\ Rp'+Qq' &= R'p+Q'q \\ Rq' &= R'q, \end{aligned}$$

alle quali darò la forma seguente

$$\begin{aligned} p-p' &= P-P', \\ P'p-Pp'+q-q' &= Q-Q', \\ Q'p-Qp'+P'q-Pq' &= R-R', \\ R'p-Rp'+Q'q-Qq' &= 0, \\ R'q-Rq' &= 0. \end{aligned}$$

Si potrebbe, per mezzo delle regole del n.° 88, ricavare immediatamente, da quattro qualunque di queste equazioni i valori dell' incognite p, p', q, e q'; ma la semplicità della prima, e dell' ultima di queste medesime equazioni permette di arrivare più prontamente al resultato. Fo, per abbreviare,

$$P-P'=e, \quad Q-Q'=e', \quad R-R'=e'',$$

e deduco in seguito dalla prima, e dall' ultima delle equazioni proposte

$$p'=p-e, \quad q'=\frac{R'q}{R};$$

indi sostituendo questi valori nelle tre altre, e facendo sparire il denominatore R, si ottiene

$$(P'-P)Rp+(R-R')q=R(e'-Pe)\ldots(a),$$
$$(Q'-Q)Rp+(RP'-PR')q=Re''-Qe)\ldots(b),$$
$$(R'-R)Rp+(RQ'-QR')q=-R^2e\ldots\ldots(c).$$

Se adesso si ricavino dalle equazioni (a), e (b) i valori di p, e q (88), e si sopprima il fattore R, il quale sarà comune al numeratore, e al denominatore, avremo

$$p=\frac{(e'-Pe)(RP'-PR')-(R-R')(e''-Qe)}{(P'-P)(RP'-PR')-(R-R')(Q'-Q)},$$

$$q=\frac{(P'-P)(e''-Qe)R-R(e'-Pe)(Q'-Q)}{(P'-P)(RP'-PR')-(R-R')(Q'-Q)};$$

ponendo questi valori nell'equazione (c), otterremo un'equazione finale, per R, e che riducesi a

$$(R'-R)[(e'-Pe)(RP'-PR')-(R-R')(e''-Qe)]$$
$$+(RQ'-QR')[(P'-P)(e''-Qe)-(e'-Pe)(Q'-Q)]$$
$$=-Re[(P'-P)(RP'-PR')-(R-R')(Q'-Q)],$$

ove non resta altro da fare che sostituire in luogo delle lettere e, e', e'' le quantità, che le medesime rappresentano.

196. Se si avessero fra le tre incognite x, y, e z un simil numero di equazioni indicate da (1), (2), (3), e si volessero determinar queste incognite, potrebbesi combinare, per esempio, l'equazione (1) coll'equazione (2), e coll'equazione (3), per eliminare x, e mandar via in seguito y dai due resultati, che si sarebbero conseguiti; ma è necessario osservare che per mezzo di quest'eliminazione *successiva*, le tre equazioni proposte non concorrono nella stessa maniera a formar l'equazione finale: l'equazione (1) è impiegata due volte, mentre che le equazioni (2), e (3) non lo sono che una; e da ciò succede che il resultato, al quale si arriva, contiene un fattore straniero alla Questione (84). Bezout, nella sua *Teoria dell' Equazioni*, ha fatto uso di un metodo, il quale non è soggetto a quest'inconveniente, e col di lui mezzo dimostra che *il grado di una equazione finale resultante dall'eliminazione tra un numero qualunque di equazioni complete, contenenti un egual numero di incognite, e di gradi qualunque, è eguale ai prodotti degli esponenti, che indicano i gradi di queste equazioni.* Si troverà nel *Complemento* di questo Trattato la dimostrazione elegante e corta, che il Sig. Poisson ha data di questa Proposizione, la quale d'altronde è facilissima a verificarsi sull'equazioni finali riportate nei numeri 194

196. Supponendo complete le equazioni proposte in questi numeri, l' incognita y si trova al primo grado in P e P', al secondo in Q e Q', al terzo in R e R'; ne segue che e sarà di primo grado, e' di secondo, e'' di terzo, e che i termini del grado il più elevato de' prodotti indicati nell'equazione finale del num.° 194, avranno per esponente 4 ovvero 2.2, e quelli dell' equazione finale del num.° 195 avranno 9, oppure 3.3.

Della ricerca delle radici commensurabili, e delle radici eguali delle Equazioni numeriche.

197. Dopo aver fatto conoscere le principali proprietà dell' equazioni algebriche, e la maniera di eliminare le incognite allorchè ve ne sono più, passo ad occuparmi della risoluzione numerica delle equazioni a una sola incognita, e vale a dire della ricerca delle loro radici, allorchè i loro coefficienti sono espressi in numeri (*).

Principierò da dimostrare *che quando l' equazione proposta non ha per coefficienti che dei numeri interi, e che quello del suo primo termine è l' unità, le sue radici reali non possono esprimersi con delle frazioni, e non possono essere in conseguenza che dei numeri interi, o dei numeri incommensurabili;*

Per dimostrare ciò sia l' equazione

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \dots + Tx + U = 0,$$

nella quale sostituiscasi una frazione irriducibile

$\frac{a}{b}$ in luogo di x; essa diverrà

$$\frac{a^n}{b^n} + P\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + Q\frac{a^{n-2}}{a^{n-2}} \dots + T\frac{a}{b} + U = 0;$$

e riducendo tutti i suoi termini al denominatore medesimo; avremo

$$a^n + Pa^{n-1}b + Qa^{n-2}b^2 \dots + Tab^{n-1} + Ub^n = 0,$$

la quale riducesi a

$$a^n + b(Pa^{n-1} + Qa^{n-2}b \dots + Tab^{n-2} + Ub^{n-1}) = 0.$$

(*) *Non evvi, per i gradi superiori al quarto, alcuna risoluzione generale; non vi è neppure, a parlar propriamente, se non se quella delle equazioni di secondo grado, che si possa riguardare come completa. L' espressioni delle radici dell' equazioni di terzo, e di quarto grado sono complicatissime, soggette a delle eccezioni, e molto meno comode nella pratica dei metodi, che darò adesso; questi si troveranno d' altronde nel* Complemento.

Il primo membro di quest' ultima equazione è formato di due parti intere, una delle quali è divisibile per b, e l'altra non l'è (98), poichè si suppone la quantità $\frac{a}{b}$ ridotta alla sua espressione più semplice, ovvero che a, e b non abbiano alcun divisore comune; una di queste parti non può dunque distrugger l' altra.

198. Fu in seguito di questa osservazione che si conobbe l' utilità di fare sparir le frazioni da una equazione, ovvero di render interi i suoi coefficienti, ma in modo peraltro che il primo termine non ne acquistasse un altro diverso dall' unità; arrivasi a ciò *facendo l' incognita proposta eguale a una nuova incognita divisa pel prodotto di tutti i denominatori dell' equazione*, poi riducendo tutti i termini al medesimo denominatore col metodo del n.° 52.

Sia, per esempio, l' equazione

$$x^3+\frac{ax^2}{m}+\frac{bx}{n}+\frac{c}{p}=0;$$

prenderemo $x=\frac{y}{mnp}$, e ponendo quest' espressione di x nell' equazione proposta, otterremo

$$\frac{y^3}{m^3n^3p^3}+\frac{ay^2}{m^3n^2p^2}+\frac{by}{mn^2p}+\frac{c}{p}=0:$$

il divisore del primo termine contenendo tutti i fattori degli altri divisori, si moltiplicherà per questo divisore, e ridurremo ciascun termine alla sua espressione più semplice: troveremo allora

$$y^3+anpy^2+bm^2np^2y+cm^3n^3p^2=0.$$

Quando i denominatori m, n, p hanno dei divisori comuni, non bisogna allora dividere y che pel più piccolo numero, il quale possa dividersi nel medesimo tempo per tutti i denominatori. Queste simplificazioni sono troppo facili a conoscersi, e quindi non è bisogno di trattenervisi: mi limiterò solamente a far osservare che, se tutti i denominatori fossero eguali a m, servirebbe fare $x=\frac{y}{m}$.

L' equazione proposta, che sarebbe allora

$$x^3+\frac{ax^2}{m}+\frac{bx}{m}+\frac{c}{m}=0,$$

diverrebbe

$$\frac{y^3}{m^3}+\frac{ay^2}{m^3}+\frac{by}{m^2}+\frac{c}{m}=0.$$

ed avrebbesi

$$y^3+ay^2+bmy+cm^2=0.$$

È manifesto che l'operazione di sopra riducesi a moltiplicare tutte le radici della proposta per il numero m, poichè

$x=\frac{y}{m}$ somministra $y=mx$.

199. Adesso, poichè a essendo la radice dell'equazione

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}....+Tx+U=0,$$

si ha

$$U=-a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2}....-Ta\ (179),$$

ne resulta che a è necessariamente uno dei divisori del numero intero U, e che in conseguenza, allorchè questo numero ha pochi divisori, servirà di sostituirli successivamente in luogo di x nell' equazione proposta, per riconoscere se essa ha o non ha una radice in numeri interi.

Se si abbia, per esempio, l' equazione

$$x^3-6x^2+27x-38=0,$$

il numero 38 non avendo per divisori che i numeri

$$1,\quad 2,\quad 19,\quad 38,$$

si proveranno questi, tanto positivamente, che negativamente, e troveremo che il solo numero intero $+2$ sodisfa all' equazione proposta, ovvero che $x=2$. Divideremo in seguito l'equazione proposta per $x-2$; eguagliando a zero il quoziente, formeremo l' equazione

$$x^2-4x+19=0,$$

le cui radici sono immaginarie; risolvendo quest' ultima troveremo, che la proposta ha tre radici,

$$x=2,\ x=2+\sqrt{-15},\quad x=2-\sqrt{-15}.$$

200. Il metodo, che ho indicato per discoprire il numero intero, che sodisfa ad una equazione, diviene impraticabile quando l'ultimo termine di quest' equazione ha molti divisori; ma l'equazione

$$U=-a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2}....-Ta,$$

somministra delle nuove condizioni, le quali abbreviano mol-

to il calcolo. Affine di rendere il metodo più chiaro, prenderò, come esempio, l'equazione

$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0,$$

a denotando sempre la radice, averemo

$$a^4+Pa^3+Qa^2+Ra+S=0,$$
$$S=-Ra-Qa^2-Pa^3-a^4,$$

dalla quale ricaveremo

$$\frac{S}{a}=-R-Qa-Pa^2-a^3.$$

Si vede primieramente da quest' ultima equazione che $\frac{S}{a}$ debb' essere un numero intero.

Passando in seguito R nel primo membro otterremo

$$\frac{S}{a}+R=-Qa-Pa^2-a^3;$$

facendo, per abbreviare, $\frac{S}{a}+R=R'$, e dividendo i due membri dell' equazione

$$R'=-Qa-Pa^2-a^3$$

per a avremo

$$\frac{R'}{a}=-Q-Pa-a^2,$$

dalla quale concluderemo che ancora $\frac{R'}{a}$ debbe essere un numero intero.

Trasportando Q nel primo membro, facendo $\frac{R'}{a}+Q=Q'$, poi dividendo i due membri per a, conseguiremo

$$\frac{Q'}{a}=-P-a,$$

dalla quale concluderemo che $\frac{Q'}{a}$ debbe essere un numero intero.

Passando finalmente P nel primo membro, facendo $\frac{Q'}{a}+P=P'$, e dividendo per a, avremo

$$\frac{P'}{a}=-1.$$

Riunendo le condizioni, che ho adesso enunciate, vedremo che il numero a sarà la radice dell' equazione proposta se sodisfarà alle equazioni

$$\frac{S}{a} + R = R',$$

$$\frac{R'}{a} + Q = Q',$$

$$\frac{Q'}{a} + P = P',$$

$$\frac{P'}{a} + 1 = 0;$$

di maniera che R', Q', e P' sieno numeri interi.

Segue da ciò, che, per assicurarsi se uno dei divisori a dell' ultimo termine S possa essere la radice dell' equazione proposta, bisogna

1.° *Dividere l' ultimo termine per il divisore* a, *ed aggiungere al quoziente il coefficiente del termine affetto da* x;

2.° *Dividere questa somma pel divisore* a, *ed aggiungere al quoziente il coefficiente del termine affetto da* x^2;

3.° *Dividere questa somma per il divisore* a, *ed aggiungere al quoziente il coefficiente del termine affetto da* x^3,

4.° *Dividere questa somma per il divisore* a, *ed aggiungere al quoziente l' unità, ovvero il coefficiente del termine affetto da* x^4; *il resultato dovrà essere eguale a zero se* a *n' è di fatto la radice.*

Queste regole convengono a un grado qualunque, osservando che non dobbiamo trovare zero per resultato se non che quando saremo giunti al primo termine dell' equazione proposta (*).

(*) *Non sarebbe difficile assicurarsi, per mezzo della formula dei quozienti data nel num.* 180, *che le quantità* $\frac{S}{a}$, $\frac{R'}{a}$, $\frac{Q'}{a}$, *prese col segno* +, *sono, principiando dall' ultimo termine, i coefficianti del quoziente del polinomio*
$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S$$
diviso per $x+a$, *e ch' è, in conseguenza,*

$$x^3+\frac{Q'}{a}x^2+\frac{R'}{a}x+\frac{S}{a}.$$

201. Allorchè si applicano queste regole ad un esempio numerico, si può disporre il calcolo in modo da far subire ciascuna prova a tutti i divisori dell'ultimo termine nel medesimo tempo.

Ecco, per l'equazione

$$x^4-9x^3+23x^2-20x+15=0,$$

la Tavola del calcolo:

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
+15, & +5, & +3, & +1, & -1, & -3, & -5, & -15, \\
+1, & +3, & +5, & +15, & -15, & -5, & -3, & -1, \\
-19, & -17, & -15, & -5, & -35, & -25, & -23, & -21, \\
 & & -5, & -5, & +35, & & & \\
 & & +18, & +18, & +58, & & & \\
 & & +6, & +18, & -58, & & & \\
 & & -3, & +9, & -67, & & & \\
 & & -1, & +9, & +67, & & & \\
 & & & 0. & & & &
\end{array}$$

Tutti i divisori dell'ultimo termine 15 sono disposti per ordine di grandezza, tanto col segno $+$ quanto col segno $-$ sopra una medesima linea (questa è la linea dei divisori a).

La seconda linea contiene i quozienti del numero 15 divisi successivamente per tutti i suoi divisori $\left(\text{questa è la linee delle quantità } \frac{S}{a}\right)$.

La terza linea è stata formata aggiungendo alla precedente il coefficiente -20, il quale moltiplica x (questa è la linea delle quantità $R'=\frac{S}{a}+R$).

La quarta linea contiene i quozienti di ciascun numero della precedente pel divisore, che gli corrisponde $\left(\text{questa è la linea delle quantità } \frac{R'}{a}\right)$. Abbiamo trascurati in questa linea tutti i numeri, i quali non erano interi.

La quinta linea resulta dai numeri scritti nella precedente sommati col numero 23, il quale moltiplica x^2 (questa linea comprende le quantità Q').

La sesta linea contiene i quozienti dei numeri della prece-

dente per il divisore, che loro corrisponde $\left(\text{dessa contiene le quantità } \frac{Q'}{a} \right)$.

La settima comprende le somme dei numeri della precedente, e del coefficiente -9, il quale moltiplica x^3 (vi si trovano le quantità $\frac{Q'}{a}+P$).

L'ottava finalmente si ottiene dividendo ciascuno dei numeri della precedente per il divisore corrispondente $\left(\text{questa è la linea di } \frac{P'}{a} \right)$; e, siccome non si trova -1 che nella colonna segnata $+3$, se ne conclude che l'equazione proposta non ha che una radice commensurabile, cioè $+3$; di maniera che dessa è divisibile per $x-3$ (*).

Possiam dispensarci da comprendere nella Tavola i divisori $+1$, e -1, i quali si provano più facilmente con la loro sostituzione immediata nell'equazione proposta.

202. Sia data, per altro esempio, l'equazione

$$x^3-7x^2+36=0.$$

Dopo di essersi assicurati che i numeri $+1$, e -1 non sodisfanno a questa equazione, formeremo, dietro alle regole precedenti, la Tavola seguente, osservando che il termine moltiplicato per x, mancando in questa equazione, debba essere considerato come se avesse zero per coefficiente; bisogna dunque sopprimere la terza linea, e dedurre immediatamente la quarta dalla seconda:

+36, +18, +12, +9, +6 +4, +3, +2, −2, −3, −4, −6, −9, −12, −18 −36
+1, +2, +3, +4 +6, +9, +12, +18, −18, −12, −9, −6, −4, −3, −2, −1
****

+1, +4, +9, +9, +4, +1
−6, −, +2, +2, −3, −6
−1, −1, −1, +1, +1
0, 0, 0.

Si trovano in quest'esempio tre numeri, i quali sodisfanno a tutte le condizioni: cioè, $+6$, $+3$, e -2. Di tal manie-

(*) *Formando il quoziente, dietro la Nota antecedente, si trova*

$$x^3-6x^2+5x-5.$$

ra si ottengono in conseguenza nel medesimo tempo le tre radici, delle quali l'equazione proposta è suscettibile, e si riconosce che essa è il prodotto dei tre fattori semplici $x-6$, $x-3$, e $x+2$.

203. È a proposito l'osservare che vi sono dell'equazioni letterali, che si trasformano immediatamente in equazioni numeriche. Se si avesse, per esempio,

$$y^3+2py^2-33p^2y+14p^3=0,$$

facendo $y=px$, si avrebbe

$$p^3x^3+2p^3x^2-33p^3x+14p^3=0,$$

resultato divisibile per p^3, e che riducesi a

$$x^3+2x^2-33x+14=0.$$

Il divisore commensurabile, di quest' ultima equazione essendo $x+7$, e dando $x=-7$, averemo

$$y=-7p.$$

L' equazione in y è di quelle, che chiamansi *equazioni omogenee*, perchè, facendo astrazione dai coefficienti numerici, ciascuno dei suoi termini contiene il medesimo numero di fattori (*).

204. Allorchè si conosce una delle radici di una equazione, possiamo prendere per incognita la differenza tra questa radice, ed una qualunque delle altre; arrivasi con tal mezzo ad una equazione di un grado minore della proposta, la quale gode di più proprietà ragionevoli.

Sia l' quazione generale

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}.....+Tx+U=0,$$

e sieno a, b, c, d, ec. le sue radici; sostituendovi $a+y$

(*) *I Lettori, che vorranno maggiori specialità sulla ricerca dei* divisori commensurabili *delle Equazioni*, *gli troveranno nella Parte III. degli* Elementi di Algebra *di Clairaut. Questo Geometra si è tanto occupato delle equazioni letterali quanto delle equazioni numeriche.*

$$\left.\begin{array}{l}
a^m + \quad ma^{m-1}y + \dfrac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y^2 + \ldots + y^m \\
+Pa^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2}y + \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y^2 + \ldots \\
+Qa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3}y + \dfrac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y^2 + \ldots \\
+Ra^{m-3} + (m-3)Ra^{m-4}y + \dfrac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y^2 + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+Ta \quad +Ty\,; \\
+U
\end{array}\right\} = 0;$$

resultato, del quale la prima colonna, simile all' equazione proposta, svanisce per sè medesima, poichè a è una delle radici di questa equazione; possiamo dunque sopprimere questa colonna, e dividere in seguito per y tutti i termini rimanenti: conseguiremo allora

$$\left.\begin{array}{l}
ma^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y + \ldots + y^{m-1} \\
+(m-1)Pa^{m-2} + \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y + \ldots \\
+(m-2)Qa^{m-3} + \dfrac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y + \ldots \\
+(m-3)Ra^{m-4} + \dfrac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+T
\end{array}\right\} = 0.$$

Questa equazione avrà visibilmente per le sue $m-1$ radici

$$y=b-a\,,\quad y=c-a\,,\quad y=d-a\,,\ \text{ec.}$$

Io la rappresenterò per

$$A + \frac{B}{2}y + \frac{C}{2.3}y^2 \ldots\ldots + y^{m-1} = 0 \ldots\ldots (d).$$

facendo, per abbreviare,

$$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}\ldots+T=A$$
$$m(m-1)a^{m-2}+(m-1)(m-2)Pa^{m-3}\ldots\quad=B \text{ ec.},$$

ed indicherò per V l'espressione

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}\ldots+Ta+U.$$

205. Se l'equazione proposta ha due radici eguali, se s'ha per esempio, $a=b$, uno dei valori di y, cioè $b-a$ diverrà zero; bisognerà dunque che l'equazione (d) sia sodisfatta facendovi $y=o$: ora, quest'ipotesi manda a zero tutti i termini, eccettuando il termine cognito A: quest'ultimo dee dunque essere zero per se medesimo: il valore di a dee dunque sodisfare ad un tempo alle equazioni

$$V=o,\quad \text{ed}\quad A=o.$$

Quando la proposta avrà tre radici eguali ad a, cioè $a=b=c$, due delle radici dell'equazione (d) diverranno nulle nel medesimo tempo, cioè $b-a$, e $c-a$; in questo caso l'equazione (d) sarà divisibile due volte di seguito per $y-o$ (179), ovvero y; ma ciò non può succeder che quando i coefficienti A, e B sono zero: bisogna dunque che il valore di a sodisfaccia nel tempo medesimo alle tre equazioni

$$V=o,\quad A=o,\quad B=o,$$

E proseguendo questi ragionamenti, vedremo che allorquando la proposta avrà quattro radici eguali, l'equazione (d) avrà tre radici eguali a zero, ovvero sarà divisibile tre volte di seguito per y; lo che esige che i coefficienti A, B, C, sieno nulli nel medesimo tempo, e che il valore di a sodisfaccia in conseguenza nel tempo stesso alle quattro equazioni

$$V=o,\quad A=o,\quad B=o,\quad C=o.$$

Non solamente si può, con siffatto mezzo, riconoscere se una radice data a si trovi più volte fra quelle dell'equazione proposta; ma si deduce anco un metodo per accertarsi se questa equazione ha delle radici ripetute, delle quali se n'ignora il valore.

A tal oggetto fa di mestieri osservare che nel caso, ove s'ha $A=o$, ovvero

$$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}\ldots+T=o,$$

possiamo riguardare a come la radice dell'equazione

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}\ldots+T=o,$$

x indicando allora un'incognita qualunque; e poichè a è parimente la radice dell'equazione $V=o$, ovvero

$$x^m+Px^{m-1}+\text{ec.}=o,$$

segue dal n.° 189. che $x-a$ è un fattore comune alle due equazioni suddivisate.

Cangiando parimente a in x nelle quantità B, C, ec., il binomio $x-a$ diverrà similmente fattore delle nuove equazioni $B=o$, $C=o$, ec., se la radice a manda nel tempo medesimo a zero le quantità primitive B, C, ec.

Ciò, che abbiam detto riguardo alla radice a, converrebbe egualmente a qualunque altra radice, la quale fosse più volte ripetuta; così, cercando, mediante il metodo del massimo comun divisore, i fattori comuni all' equazioni

$$V=o, \ A=o, \ B=o, \ C=o, \text{ ec.},$$

questi fattori daranno le radici eguali della proposta, nell'ordine seguente.

I fattori comuni alle due prime equazioni solamente son dei fattori doppî della proposta, e vale a dire, che se si trova per comun divisore tra $V=o$; e $A=o$ un' espressione della forma $(x-\alpha)(x-\beta)$, per esempio, l' incognita x avrà due valori eguali ad α, e due altri eguali a β, ovvero la proposta avrà questi quattro fattori

$$(x-\alpha), \ (x-\alpha), \ (x-\beta), \ (x-\beta).$$

I fattori comuni nello stesso tempo alle tre prime dell' equazioni qui sopra denotano dei fattori tripli nella proposta, e vale a dire che, se i primi son della forma $(x-\alpha)(x-\beta)$, per esempio, i secondi saranno della forma seguente $(x-\beta)^3$ $(x-\beta)^3$. È facile spinger queste considerazioni tant'oltre quanto vorrassi.

106. Egli è a proposito l' osservare che l' equazione $A=o$, la quale, pel cangiamento di a in x, diviene

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}\ldots+T=o,$$

si deduce immediatamente dall' equazione $V=o$, oppure dalla proposta

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=o,$$

moltiplicando ciascun termine di quest' ultima per l' esponente della potenza di x, che esso contiene, e diminuendo in seguito quest' esponente di una unità; sopra di che bisogna avvertire che il termine U essendo equivalente a Ux^o, debba andare a zero in quest' operazione dove si trova moltiplicato per zero. L' equazione $B=o$ si ricava da $A=o$, della stessa maniera che $A=o$ ricavasi da $V=o$; $C=o$ ricavasi da $B=o$, come quest'ultima si ricava da $A=o$; e così di seguito (*).

(*) *Si concluderebbe facilmente da ciò, che precede che il divisore comune tra l' equazioni* V=o, e A=o *contiene i fat-*

207. Per ischiarir ciò con un esempio, prenderò l'equazione
$$x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0;$$
l'equazione $A=0$ diviene in questo caso
$$5x^4-52x^3+201x^2-342x+216=0;$$
il suo divisor comune con la proposta è
$$x^3-8x^2+21x-18.$$
Questo divisore essendo di terzo grado, dee contener egli stesso più fattori, bisogna dunque cercare se desso ne abbia dei comuni coll'equazione $B=0$, la quale è in questo caso
$$20x^3-156x^2+402x-342=0;$$
e si trova difatto per resultato $x-3$: dunque la proposta ha tre radici eguali a 3, oppure ammette $(x-3)^3$ nel numero dei suoi fattori. Dividendo allora il primo divisor comune per $x-3$ tante volte di seguito quante è possibile, e vale a dire due volte, trovasi $x-2$. Questo divisore non essendo comune che all'equazion proposta, ed all'equazione $A=0$: non entra che due volte nella proposta. Si vede finalmente che quest'equazione è equivalente a
$$(x-3)^3(x-2)^2=0.$$

208. L'equazione (d), che dà le differenze tra la radice b, e ciascuna delle altre, allorchè si pone b in luogo di a, le differenze tra la radice c, e ciascuna delle altre allorchè poniamo c in luogo di a, ec., non cangiando di forma mediante queste diverse sostituzioni, e conservando i medesimi coefficienti come la proposta, può essere generalizzata in maniera da contenere tutte le differenze delle radici combinate due a due. Per ottener ciò, serve di eliminare a per mezzo dell'equazione
$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}\ldots+Ta+U=0;$$
poichè il resultato non dipendendo che dai coefficienti, e non conservando alcuna traccia della radice, che abbiamo considerata in particolare, converrà a tutte egualmente.

È manifesto che l'equazione finale deve elevarsi al grado $m(m-1)$; imperocchè le sue radici

$$\begin{array}{llll} a-b, & a-c, & a-d, & \text{ec.}, \\ b-a, & b-c, & b-d, & \text{ec.}, \\ c-a, & c-b, & c-d, & \text{ec.}, \text{ ec.} \end{array}$$

---

tori eguali alzati ad una potenza minore di una unità che nella proposta; ma il conoscere questa proposizione non essendo necessario per ciò che segue, io l'ho posta nel Complemento, *ove dessa è dimostrata in una maniera, che mi sembra assai semplice.*

sono nel medesimo numero delle permutazioni, che si posson formare disponendo, due a due, le m lettere a, b, c, ec.,
Di più, poichè le quantità

$$a-b \text{ e } b-a,\ a-c,\ \text{e } c-a,\ b-c \text{ e } c-b, \text{ ec.}$$

non differiscono che riguardo al segno, le radici dell'equazione saranno eguali due a due, facendo astrazione dal segno; di tal maniera che quando avremo $y=a$, avremo nel tempo medesimo $y=-a$. Resulta da ciò che quest'equazione non dee contenere che dei termini ove l'incognita sale ad un grado pari; poichè il suo primo membro deve essere il prodotto di un certo numero di fattori di secondo grado della forma

$$y^2-a^2=(y-a)(y+a)(184);$$

essa dunque sarà della forma

$$y^{2n}+py^{2n-2}+qy^{2n-4}\ldots+ty^2+u=0.$$

Facendo $y^2=z$, la cangeremo in

$$z^n+pz^{n-1}+qz^{n-2}\ldots+tz+u=0;$$

e l'incognita z essendo il quadrato di y, avrà per valori i quadrati delle differenze tra le radici della proposta.

Torna in acconcio osservare che le differenze tra le radici reali della proposta essendo necessariamente reali, i loro quadrati saranno positivi, e che in conseguenza l'equazione in z non avrà che delle radici positive, se la proposta non ne ha che delle reali.

Sia, per esempio, l'equazione

$$x^3-7x+7=0;$$

facendovi $x=a+y$, avremo

$$\left.\begin{array}{l} a^3+3a^2y+3ay^2+y^3 \\ -7a-7y \\ +7 \end{array}\right\}=0.$$

Sopprimendo i termini a^3-7a+7, di cui l'insieme è nullo, dietro l'equazione proposta, e dividendo il resto per y, otterremo

$$3a^2+3ay+y^2-7=0;$$

eliminando a tra questa equazione, e l'equazione

$$a^3-7a+7=0,$$

avremo

$$y^6-42y^4+441y^2-49=0;$$

facendo $z=y^2$, conseguiremo

$$z^3-42z^2+441z-49=0.$$

209. La sostituzione di $a+y$ in luogo di x nell' equazione

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}....+U=o(204),$$

s' impiega qualche volta per fare sparire uno dei termini di quest' equazione. Si ordina allora il resultato per rapporto alle potenze di y, che prende il luogo dell' incognita x, e si riguarda la quantità a come una seconda incognita, la qual si determina eguagliando a zero il coefficiente del termine, che si vuol fare sparire; si ha in questa maniera

$$\left.\begin{array}{l} y^m+may^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2y^{m-2}....+a^m \\ +Py^{m-1}+(m-1)Pay^{m-2}.....+Pa^{m-1} \\ \quad + \quad Qy^{m-2}.....+Qa^{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +U \end{array}\right\}=o;$$

Se il termine, che si vuol togliere, è il secondo, ovvero quello, che è affetto da y^{m-1}, si fa $ma+P=o$, d' onde ricavasi $a=-\frac{P}{m}$. Sostituendo questo valore nel resultato, non restano che i termini affetti da

$$y^m,\ y^{m-2},\ y^{m-3},\ \text{ec.}$$

Segue da ciò che *si fa svanire il secondo termine di una equazione, sostituendo all' incognita di questa equazione una nuova incognita, alla quale si unisce il coefficiente del secondo termine preso con un segno contrario a quello, dal quale è affetto, e diviso per l' esponente del primo termine.*

Sia, per esempio, l' equazione

$$x^3+6x^2-3x+4=o;$$

la regola somministra

$$x=y-\tfrac{6}{3}=y-2;$$

e sostituendo, otterremo

$$\left.\begin{array}{r} y^3-6y^2+12y-8 \\ +6y^2-24y+24 \\ -3y+6 \\ +4 \end{array}\right\}=o;$$

che si riduce a

$$y^3-15y+26=o,$$

ove più non si trova il termine affetto da y^2. Si farebbe sparire il terzo termine (affetto da y^{m-2}) eguagliando a zero l' insieme delle quantità, che lo moltiplicano, e vale a dire po-

Queste tre equazioni contengono le condizioni necessarie per determinare le incognite p, q, e r; ed il Problema proposto riducesi alla loro risoluzione.

Della risoluzione per approssimazione delle Equazioni numeriche.

211. Dopo di aver esaurita la ricerca dei divisori commensurabili, bisogna ricorrere ai metodi di approssimazione, i quali riposano sul principio seguente:

Allorchè si sono trovate due quantità, le quali, sostituite in una equazione in luogo dell' incognita, danno due resultati di segno contrario, possiamo concludere che una delle radici dell' equazione proposta è compresa tra queste due quantità, ed è per conseguenza reale.

Sia, per esempio, l' equazione

$$x^3-13x^2+7x-1=0;$$

se si sostituiscano successivamente 2, e 20 in luogo di x, il primo membro, invece di ridursi a zero, sarà eguale a -31 nel primo caso, ed a $+2939$ nel secondo; se ne può concludere che questa equazione ha una radice reale compresa tra 2, e 20, e vale a dire, maggiore di 2, e minore di 20.

Siccome avrò spesso bisogno di esprimere una tal relazione, impiegherò i segni $>$, e $<$, di cui si servono gli algebristi per denotare l' ineguaglianza di due grandezze, ponendo la maggiore delle due quantità avanti l' apertura del segno, e l' altra al suo vertice. Scriverò in conseguenza

$$x>2 \text{ per } x \text{ maggiore di } 2,$$
$$x<20 \text{ per } x \text{ minore di } 20.$$

Ciò posto, per dimostrare la precedente asserzione, possiam ragionare nel modo seguente. Riunendo in una parte i termini negativi, si ha

$$x^3+7x-(13x^2+1);$$

quantità, la quale si è trovata negativa allorchè abbiamo fatto $x=2$, perchè in quest' ipotesi,

$$x^3+7x<13x^2+1,$$

e che è divenuta positiva allorquando abbiam fatto $x=20$, perchè allora

$$x^3+7x>13x^2+1:$$

di più è manifesto che le quantità

$$x^3+7x, \text{ e } 13x^2+1$$

aumentano ciascuna dal canto loro allorchè si danno a x dei valori di più in più grandi, e che prendendo questi valori così prossimi gli uni agli altri quanto si vorrà, potremo far crescere le quantità proposte per dei gradi di tal piccolezza, quanta giudicheremo a proposito. Ma, poichè la prima delle quantità qui sopra minore in principio della seconda, è divenuta in seguito maggiore, egli è evidente che essa ha un accrescimento più rapido che l'altra, per mezzo del quale essa compensa l'eccesso, che quest'ultima aveva sopra di lei, ed in seguito la sorpassa: esiste dunque un istante ove queste due quantità sono eguali.

Il valore di x, qualunque egli sia (la cui esistenza si è già dimostrata), che rende

$$x^3+7x=13x^2+1,$$

dando

$$x^3+7x-(13x^2+1)=0,$$

ovvero

$$x^3-13x^2+7x-1=0,$$

è necessariamente la radice dell'equazione proposta.

Ciò, che abbiamo veduto sull'equazione particolare

$$x^3-13x^2+7x-1=0,$$

può applicarsi ad un'equazione qualunque, della quale denoterò i termini positivi per P, ed i negativi per N. Sia a il valore di x, il quale ha dato un resultato negativo, e b, quello, che ne ha dato uno positivo; queste due circostanze non hanno potuto aver luogo se non perchè per la prima sostituzione s'aveva $P<N$, e per la seconda $P>N$; P avendo dunque sorpassato N, ne concluderemo, come qui sopra, che esiste un valore di x compreso tra a, e b, il quale dà $P=N$ (*).

(*) *I ragionamenti fatti qui sopra, riguardati in generale come assai evidenti, hanno ricevuto dal Sig. Encontre degli sviluppamenti utili, che credo dover qui riportare per i Lettori, i quali desiderassero delle prove più circostanziate.*

1.° Ecco come possiamo assicurarci della possibilità di far prendere degli accrescimenti, tanto piccoli quanto vorrassi, ai Polinomi P e N. Sia $P=\alpha x^m+\beta x^n \ldots +\alpha x^q$, m essendo l'esponente più alto di x; se vi si ponga $a+y$ in luogo di x, questo polinomio prenderà la forma

$$A+By+Cy^2 \ldots\ldots +Ty^m,$$

i coefficienti A, B, C, . . . T essendo in numero finito e

Il ragionamento, che abbiamo fatto qui sopra, esige che i valori, i quali si danno a x, sieno ambedue positivi, oppure ambedue negativi; perchè, allorquando essi hanno dei segni diversi, quello che è negativo, fa cangiar di segno i termini dell' equazione proposta, i quali contengono delle po-

---

di valore infinito; il primo termine A sarà il valore, che prende il polinomio P, allorchè $x=a$; il resto

$$By+Cy^2 \ldots +Ty^m=y(B+Cy \ldots +Ty^{m-1})$$

sarà la quantità, di cui si accresce questo medesimo polinomio quando si aumenta di y *il valore di* x=a. *Ciò posto, se* S *denota il più grande de' coefficienti* B, C, ... T, *avremo*

$$B+Cy \ldots +Ty^{m-1}<S(1+y+ \ldots +y^{m-1});$$

ora

$$1+x \ldots +y^{m-1}=\frac{1-y^m}{1-y}(158);$$

$$y(B+cy \ldots +Ty^{m-1})<Sy\left(\frac{1-y^m}{1-y}\right),$$

e per conseguenza l' accrescimento del polinomio P *sarà più piccolo di qualunque quantità data* c, *se si renda* $\frac{Sy(1-y^m)}{1-y}$ *minore di qualunque quantità: noi giungeremo a ciò facendo* $\frac{Sy}{1-y}=c$, *perchè allora* $y=\frac{c}{S+c}$ *essendo* <1, *la quantità* $\frac{Sy(1-y^m)}{1-y}$, *eguale a* $\frac{Sy}{1-y}-\frac{Sy^{m-1}}{1-y}$, *sarà necessariamente minore della quantità* c, *della quale nulla ne limita la picciolezza.*

2.° *Se si denoti per* h *l' accrescimento del polinomio* P, *per* k *quello del polinomio* N, *il cangiamento che ne resulterà nel valore della loro differenza sarà* h—k, *e potrà esser reso più piccolo di una quantità data, rendendo più piccolo di questa medesima quantità l' accrescimento, che è il più grande dei due: potremo dunque nell' intervallo da* x=a *a* x=b *far cangiare col mezzo di quantità tanto piccole, quanto vorremo, la differenza dei polinomi* P *e* N; *e poichè la medesima passa dal negativo al positivo in questo intervallo, esso si approssimerà necessariamente a zero tanto da vicino quanto vorremo. (Vedete* gli Annali di Matematiche pure ed applicate *pubblicati dal Sig. Gergonne, T. IV. pag. 210).*

tenze impari di x, ed in conseguenza l' espressioni P, e N non sono composte della stessa maniera in una sostituzione, e nell' altra. Questa difficoltà sparisce facendo $x=0$; mediante questa sostituzione l' equazione proposta riducesi al suo ultimo termine, il quale si trova necessariamente di segno contrario a quello del resultato della prima, o della seconda sostituzione. Sia, per esempio, l' equazione

$$x^4-2x^3-3x^2-15x-3=$$

il cui primo membro, allorchè facciamo

$$x=-1\ ,\ \text{e}\ x=2\ ,$$

diviene $+12$, e -45. Supponendo $x=0$, riducesi a -3; le due sostisuzioni

$$x=0\ ,\ \text{e}\ x=-1$$

danno dunque dei resultati di segni contrarî; ma, ponendo $-y$ in luogo di x, l' equazione proposta si cangia in

$$y^4+2y^3-3y^2+15y-3=0\ ,$$

e si ha

$$P=y^4+2y^3+15y\ ,\quad N=3y^2+3\ ,$$

d' onde ricavasi

$$P<N \text{ allorchè } y=0\ ,$$
$$P>N \text{ allorchè } y=1.$$

Possiamo dunque ragionare nel caso attuale come nel precedente, e concluderne che l' equazione in y ha una radice reale compresa tra 0, e $+1$, dal che ne segue che quella dell' equazione in x si trova tra 0, e -1, ed in conseguenza tra 2, e -1.

La proposizione, che ho enunciata, non potendo presentare che dei casi compresi nell' uno, o nell' altro di quelli, che ho esaminati, è sufficientemente dimostrata.

212 Prima di andar più avanti, farò osservare che *qualunque sieno il grado di una equazione, ed i suoi coefficienti, possiamo sempre assegnare un numero, il quale, sostituito in luogo dell' incognita, renda il primo termine maggiore della somma di tutti gli altri.* Conoscesi a prima vista la verità di quest' asserzione, per poco che siasi osservato l' andamento, che seguono gli accrescimenti delle diverse potenze di un numero maggiore della unità (126), poichè; tra queste potenze, la più alta sorpassa tanto più quelle, che le sono inferiori, quanto il numero, di cui si tratta, è più considerevole, di tal maniera che niente limita gli eccessi della prima sopra ciascuna dell' altre; ecco di più in qual modo pos-

siam trovare un numero, il quale sodisfaccia alla condizione enunciata.

È manifesto che il caso più sfavorevole sarebbe quello dove tutti i coefficienti dell' equazione si rendessero eguali al più grande di loro, e vale a dire, se in luogo di

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0,$$

si prendesse

$$x^m - Sx^{m-1} - Sx^{m-2} \ldots\ldots - Sx - S = 0,$$

S denotando il maggiore dei coefficienti P, Q ..... T, U. La differenza tra il primo termine è la somma di tutti gli altri essendo allora

$$x^m - S(x^{m-1} + x^{m-2} \ldots\ldots + 1),$$

osserveremo che

$$x^{m-1} + x^{m-2} \ldots\ldots + 1 = \frac{x^m - 1}{x - 1} (158);$$

e mediante questa espressione si cangerà la precedente in

$$x^m - \frac{S(x^m - 1)}{x - 1}, \text{ ovvero in } x^m - \frac{Sx^m}{x -} + \frac{S}{x - 1}.$$

Se si pone in seguito M in luogo di x, conseguiremo

$$M^m - \frac{SM^m}{M - 1} + \frac{S}{M - 1};$$

quantità, che renderemo positiva se faremo

$$M^m = \frac{SM^m}{M - 1}:$$

poichè, se dividasi ciascun membro di questa equazione per M^m, avremo

$$1 = \frac{S}{M - 1}, \text{ di dove } M = S + 1.$$

Sostituendo dunque in luogo di x il maggiore dei coefficienti dell'equazione, aumentato dell' unità, renderemo il primo termine maggiore della somma di tutti gli altri; ed in conseguenza il suo segno determinerà quello del resultato della sostituzione.

Il numero M potrebbe esser minore, se non si volesse che rendere la parte positiva dell' equazione proposta maggiore della parte negativa; poichè servirebbe, per ciò, di rendere il primo termine superiore alla somma che darebbero tutti gli altri, quando ancora i loro coefficienti fossero eguali, non più al maggiore di tutti, ma solamente al maggiore dei coef-

ficienti negativi: non dovrebbesi dunque che prender per M questo coefficiente aumentato della unità (*).

Segue da ciò che le radici positive dell' equazione proposta sono necessariamente comprese tra zero, e $S+1$.

Possiamo pure scoprire col medesimo mezzo un limite delle radici negative; bisogna per questo sostituire $-y$ in luogo di x nell' equazione proposta, e fare in modo di rendere il primo termine positivo, se desso divien negativo (178). È evidente, per questa trasformazione, che i valori positivi di y corrispondono ai valori negativi di x, e viceversa. Se R è il massimo coefficiente negativo dopo tal cangiamento, $R+1$ sarà il limite dei valori positivi di y; ed in conseguenza $-R-1$ sarà quello dei valori negativi di x.

Finalmente, se si volesse ottenere per la minore delle radici un limite più approssimato che zero, vi si arriverebbe sostituendo $\frac{1}{y}$ in luogo di x nell' equazione proposta, e preparando la trasformata in y come l' abbiam prescritto nel numero 178. I valori di y essendo inversi di quelli di x, il maggiore de' primi corrisponderebbe al più piccolo dei secondi, e reciprocamente. Se dunque $S'+1$ indicasse il limite superiore dei valori di y, ovvero che si avesse

$$y<S'+1,$$

il che darebbe

$$\frac{1}{x}<S'+1,$$

ne resulterebbe successivamente

$$1<(S'+1)x, \quad \frac{1}{S'+1}<x.$$

Infatti è facile vedere che si può, senza turbare l' ordine di grandezza di due quantità separate da dei segni $<$, o $>$, moltiplicarle, o dividerle per una stessa quantità; e che si può ancora sommare o sottrarre una stessa quantità da ciascun

(*) *Trovansi nella* Risoluzione dell' equazioni numeriche *del Sig. Lagrange delle formole, le quali somministrano dei limiti più ristretti; ma ciò, che ho detto di sopra, serve per rendere indipendenti dalla considerazione dell' infinito le Proposizioni fondamentali della Risoluzione delle equazioni.*

lato dei segni $>$, e $<$, i quali godono, a questo riguardo, delle medesime proprietà che il segno d' eguaglianza.

213. Segue da ciò, che precede, che *qualunque equazione di grado impari ha necessariamente una radice reale di un segno contrario a quello del suo ultimo termine*; poichè, se si prende il numero M tale che il segno della quantità

$$M^m+PM^{m-1}+QM^{m-2} \; . \; . \; . \; . \; . +TM\pm U$$

non dipenda che da quello del suo primo termine M^m, l'esponente m essendo impari, il termine M^m sarà dello stesso segno del numero M (128). Ciò posto, se l'ultimo termine U ha il segno $+$, e se si faccia $x=-M$, avremo un resultato di segno contrario a quello che ci somministra la supposizione di $x=0$; dal che si fa manifesto che la proposta ha una radice tra o, e $-M$, vale a dire negativa. Se l'ultimo termine U ha il segno $-$, facciasi allora $x=+M$; si ottiene un resultato di segno contrario alla supposizione di $x=0$; ed in questo caso la radice si trova tra o, e $+M$, vale a dire positiva.

214. Allorchè l'equazione proposta è di un grado pari, il primo termine M^m restando positivo qualunque siasi il segno, che si dà a M, non possiamo assicurarci col mezzo di ciò, che precede, dell' esistenza di una radice reale, se l'ultimo termine ha il segno $+$; poichè, sia che si faccia $x=0$, ovvero $x=\pm M$, si ha sempre un resultato positivo; ma quando questo termine è negativo, si trovano, facendo

$$x=+M, \quad x=0, \quad x=-M,$$

tre resultati affetti respettivamente dai segni $+$, $-$, e $+$, ed in conseguenza l'equazione proposta ha in questo caso almeno due radici reali, una positiva compresa tra M, e o, l'altra negativa, compresa tra o, e $-M$: *dunque ogni equazione di grado pari, il cui ultimo termine è negativo, ha almeno due radici reali, una positiva, e l'altra negativa.*

215. Passo adesso alla risoluzione delle equazioni per approssimazione; ed affine di render più chiaro ciò, che ho da dire sopra questo soggetto, prendo immediatamente un esempio. Sia l'equazione

$$x^4-4x^3-3x+27=0;$$

il suo massimo coefficiente negativo essendo -4, segue dal n.° 212, che la sua maggior radice positiva sarà minore di 5. Sostituendovi $-y$ in luogo di x, essa diviene

$$y^4+4y^3+3y+27=0;$$

e questo resultato avendo tutti i suoi termini positivi, fa vedere che y debbe essere negativo; dal che ne segue che x è necessariamente positivo, e che l'equazione proposta non può aver radici negative, le radici reali sono dunque comprese tra 0, e $+5$:

Il primo metodo, che si presenta per arrivare a dei limiti più approssimativi, consiste nel supporre successivamente

$$x=1, \quad x=2, \quad x=3, \quad x=4;$$

e se due di questi numeri, sostituiti nell'equazione proposta, danno dei resultati di segni contrarî, essi saranno dei nuovi limiti delle radici. Ora, facendo

$x=1$, il suo primo membro diviene $+21$,
$x=2$ . . . . $+5$,
$x=3$ . . . . -9,
$x=4$ . . . . $+15$:

si vede dunque che quest'equazione ha due radici reali, una compresa tra 2, e 3, e l'altra tra 3, e 4. Per approssimarsi ancor più al valore della prima prenderemo il medio tra i due numeri, che lo comprendono; il che darà 2,5 (*Aritm.* 129): supporremo in seguito $x=2,5$; il resultato di questa sostituzione, il quale è

$$+39,0625-62,5-7,5+27=-3,9375,$$

dimostra, poichè è negativo, che la radice cercata cade tra 2, e 2,5. Prendendo il medio tra questi due numeri, otterremo 2,25; limitandosi a $x=2,3$, avremo la radice cercata, che differisce dal vero suo valore meno di un decimo, e ce ne approssimeremo rapidissimamente per mezzo del seguente metodo, dovuto a Newton.

Faremo $x=2,3+y$; è evidente che l'incognita y non sarà che una piccola frazione, di cui potremo trascurare il quadrato, e le potenze superiori: avremo in tal modo

$$\begin{aligned} x^4 &= (2,3)^4 + 4(2,3)^3 y, \\ -4x^3 &= -4(2,3)^3 - 12(2,3)^2 y, \\ -3x &= -3(2,3) - 3y; \end{aligned}$$

mediante queste sostituzioni, l'equazione proposta diverrà

$$-0,5839-17,812y=0,$$

e darà

$$y=-\frac{0,5839}{17,812}.$$

In questa prima operazione non anderemo al di là delle centesime parti, e ne resulterà

$$y=-0,03, \text{ e } x=2,3-0,03=2,27.$$

Per ottenere un nuovo valore di x più esatto del precedente, supporremo $x=2,27+y'$; e sostituendo nell' equazione proposta, non si terrà conto che delle prime potenze di y'. Si troverà

$$-0,0459535\,9-18,046468y'=0,$$

da cui ricavasi

$$y'=-\frac{0,0459535\,9}{18,046468}=-0,0025,$$

ed in conseguenza $x=2,2675$. Possiamo, continuando questo metodo, approssimarci tanto quanto verremo al vero valore di x.

La seconda radice reale compresa tra 3, e 4, calcolata nella stessa maniera, sarà

$$x=3,6797,$$

arrestandosi alla quarta decimale.

216. Apprezzeremo l' esattezza del metodo, che ho esposto, cercando il limite dei valori de' termini, che si trascurano.

Se l' equazione proposta fosse

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots\ldots+Tx+U=0,$$

la sostituzione di $a+y$ in luogo di x darebbe per resultato il primo di quelli, che ho trovati nel n.° 204, perchè a non essendo la radice dell' equazione, ma solamente un valore approssimato di x, non manda a zero la quantità

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}\ldots\ldots+Ta+U.$$

Rappresentando quest' ultima per V, avremo, in luogo dell' equazione (d) del n.° citato, la seguente

$$V+\frac{A}{1}y+\frac{B}{1.2}y^2+\frac{C}{1.2.3}y^3\ldots\ldots+y^m=0,$$

dalla quale ricaveremo

$$Ay=-V-\frac{B}{1.2}y^2-\frac{C}{1.2.3}y^3\ldots\ldots-y^m,$$

$$y=-\frac{V}{A}-\frac{By^2}{1.2A}-\frac{Cy^3}{1.2.3A}\ldots\ldots-\frac{y^m}{A}.$$

Trascurando le potenze di y superiori alla prima, ci fermiamo a

$$y=-\frac{V}{A},$$

e l' errore è

$$-\frac{By^2}{1.2A}-\frac{Cy^3}{1.2.3A}\ldots\ldots-\frac{y^m}{A}.$$

Se a non differisce dal vero valore di x che di una quantità minore di $\frac{1}{p}a$, l' errore di sopra diverrà minore del numero, che si otterrebbe ponendovi $\frac{1}{p}a$ in luogo di y; il che darebbe

$$-\frac{B}{1.2A}\left(\frac{a}{p}\right)^2-\frac{C}{1.2.3A}\left(\frac{a}{p}\right)^3\ldots\ldots-\frac{1}{A}\left(\frac{a}{p}\right)^m.$$

Calcolando questa quantità, ci assicureremo se la medesima può essere trascurata di fronte a $\frac{V}{A}$, e se per questo si trovasse troppo considerevole, farebbe mestieri di cercare per a un numero più prossimo al valore vero di x.

Del rimanente, allorchè abbiamo calcolati più numeri y, y', y'', ec., e che i resultati ottenuti formano una serie decrescente, l' approssimazione non potrebbe esser dubbiosa.

217. Il metodo, del quale ho fatt' uso, è conosciuto sotto il nome di *Metodo delle Sostituzioni successive*. Lagrange lo ha considerabilmente perfezionato. (Vedete la *Risoluzione dell' equazioni numeriche*). Egli ha primieramente osservato, che non sostituendo che i numeri interi, si potrebbe passare al di là di più radici senz' accorgersi delle medesime. Difatto, se si avesse, per esempio, l' equazione

$$(x-\tfrac{2}{3})(x-\tfrac{1}{2})(x-3)(x-4)=0,$$

e che si sostituissero in luogo di x i numeri 0, 1, 2, 3, ec., si passerebbe al di là delle radici $\frac{2}{3}$, e $\frac{1}{2}$ senza riconoscerne l' esistenza, poichè avrebbesi

$$(0-\tfrac{2}{3})(0-\tfrac{1}{2})(0-3)(0-4)=+\tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{2}\times3\times4,$$
$$(1-\tfrac{2}{3})(1-\tfrac{1}{2})(1-3)(1-4)=+\tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{2}\times2\times3,$$

resultati del medesimo segno. E facile vedere che questa circostanza dipende da ciò che la sostituzione di 1 in luogo di x fa cangiare nello stesso tempo il segno ai due fattori $x-\frac{2}{3}$, e $x-\frac{1}{2}$, i quali, di negativi che essi erano allorchè si poneva zero in luogo di x, divengono ambedue positivi; ma, se si fosse posto per x un numero compreso tra $\frac{2}{3}$, e $\frac{1}{2}$, il fattore $x-\frac{2}{3}$ solo avrebbe cangiato di segno, e sarebbesi ottenuto un resultato negativo.

Caderemo necessariamente sopra un simile resultato sostituendo in luogo di x dei numeri, la cui differenza sia minore di quella delle radici $\frac{1}{3}$, e $\frac{1}{2}$. Se per esempio, si fanno le sostituzioni $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, ec., troveremo due cangiamenti di segno.

Potrebbesi obiettare all' esempio qui sopra esposto che, allorquando abbiamo fatto sparire i coefficienti frazionarî da un' equazione, dessa non può aver per radici che dei numeri interi, o irrazionali, e non delle frazioni; ma è facil vedere che i numeri irrazionali, in luogo dei quali sono state qui poste delle frazioni per maggiore semplicità, possono differire tra di loro meno dell' unità.

In generale, i resultati saranno del medesimo segno tutte le volte che le sostituzioni cangeranno il segno di un numero pari di fattori (*). Per ovviare a quest' inconveniente, è necessario porre tra i numeri da sostituirsi, dal più piccol limite fino al più grande, una differenza minore della più piccola tra le differenze, che possono aver fra loro le radici dell'equazione proposta: con questo mezzo le sostituzioni cadranno necessariamente tra le radici consecutive, e non faranno cangiare di segno che un solo fattore (**). Questa operazione non esige che si conosca la più piccola differenza delle radici, ma solamente un limite, al disotto del quale essa non potrebbe cadere.

Per procurarsi questo limite, formeremo l' equazione de' quadrati delle differenze delle radici (208).

Sia

$$z^n+pz^{n-1}+qz^{n-2}\ldots\ldots+tz+u=0\ldots(D)$$

questa equazione: per ottenere il più piccolo limite delle sue radici, faremo $z=\frac{1}{v}$ (212), ed otterremo

$$\frac{1}{v^n}+p\frac{1}{v^{n-1}}+q\frac{1}{v^{n-2}}\ldots\ldots+t\frac{1}{v}+u=0,$$

ovvero, riducendo tutti i termini al medesimo denominatore

$$1+pv+qv^2\ldots\ldots+tv^{n-1}+uv^n=0;$$

(*) *Non è dunque possibile di scoprire con questo metodo le radici eguali allorchè le medesime sono in numero pari; ma s'impiega allora quello del n.° 205.*

(**) *Non si considerano qui le radici immaginarie, poichè esse sono sempre in numero pari, e si combinano, a due a due, in fattori reali di secondo grado, che non cambiano di segno qualunque sia il valore, che si dia ad* x (ved. il Complemento).

poi dividendo per u, avremo

$$v^n+\frac{t}{u}v^{n-1}\ldots+\frac{q}{u}v^2+\frac{p}{u}v+\frac{1}{u}=0;$$

e se $\frac{r}{u}$ indica il massimo coefficiente negativo di questa equazione avremo

$$\frac{1}{\frac{r}{u}+1}<z.$$

Non bisogna considerar qui che il limite positivo, il solo che si rapporti alle radici reali dell' equazione proposta.

Conoscendo il limite

$$\frac{1}{\frac{r}{u}+1}=\frac{u}{r+u},$$

minore del quadrato della più piccola differenza tra le radici della proposta, n' estrarremo la radice quadrata, o almeno prenderemo il numero razionale immediatamente al disotto di essa radice; questo numero, che indicherò per k, denoterà l' intervallo, che bisognerà frapporre tra ciascuno dei numeri da sostituirsi. Formeremo così le due serie

$$0,+k,+2k,+3k, \text{ ec. },$$
$$-k,-2k,-3k, \text{ ec. },$$

delle quali non prenderemo che i termini compresi tra i limiti della minore, e della maggiore delle radici negative dell' equazione proposta. I cangiamenti di segno, che offrirà la serie dei resultati ottenuti mediante la sostituzione di ciascuno di questi numeri in luogo di x nell' equazione proposta, manifesteranno le sue diverse radici reali, tanto positive, che negative.

218. Sia, per esempio, l' equazione

$$x^3-7x+7=0,$$

la quale mi ha condotto nel n.° 208. all' equazione

$$z^3-42z^2+441z-49=0:$$

facendo $z=\frac{1}{v}$, ed ordinando per rapporto a v il resultato

di questa sostituzione, si ha

$$v^3-9v^2+\frac{42}{49}v-\frac{1}{49}=0,$$

da cui ricavasi

$$v<10,\ z>\frac{1}{10}:$$

bisognerà dunque prender $k=$, ovvero $<\frac{1}{\sqrt{10}}$. Si sodisfarebbe a questa condizione prendendo $k=\frac{1}{4}$, ma è bastante supporre $k=\frac{1}{3}$; poichè, ponendo 9 in luogo di v nell' equazione precedente, s' ottiene un resultato positivo, e che non può divenire che maggiore allorchè daremo a v un valore più considerevole, poichè i termini v^3, e $9v^2$ già si distruggono, e $\frac{42}{49}v$ supera $\frac{1}{49}$.

Il maggior limite delle radici positive dell' equazione proposta

$$x^3-7x+7=0$$

è 8, e quello delle radici negative è -8; avremo dunque da sostituire per x i numeri

$$0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3}\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{24}{3},$$

$$-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{3}{3},-\frac{4}{3},\ \ldots\ldots\ldots\ -\frac{24}{3}.$$

Possiamo evitare le frazioni facendo $x=\frac{x'}{3}$; poichè allora le differenze tra i valori di x' saranno triple di quelle, che si trovano tra i valori di x, e sorpasseranno in conseguenza l' unità: non avremo che da sostituire successivamente

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ldots,\ 24,$$
$$-1,-2,-3,\ \ldots\ldots\ldots,-24,$$

nell' equazione

$$x'^3-63x'+189=0.$$

I segni dei resultati cangeranno da $+4$ a $+5$, da $+5$

$a + 6$, e da $-9a - 10$; di maniera che avremo i valori positivi

$$\left.\begin{array}{l} x'>4 \text{ e } <5 \\ x'>5 \text{ e } <6 \end{array}\right\}, \text{ di dove } \left\{\begin{array}{l} x>\frac{4}{3} \text{ e } <\frac{5}{3} \\ x>\frac{5}{3} \text{ e } <\frac{6}{3} \end{array}\right.$$

ed il valore negativo di x' cadendo tra -9, e -10, quello di x sarà tra $-\frac{9}{3}$, $-\frac{10}{3}$.

Conoscendo adesso le diverse radici dell'equazione proposta a $\frac{1}{3}$ presso, potremo approssimarvi di più, come nel numero 215.

219. Ciò che abbiamo praticato sull'esempio del n.° 215; e su quello del numero precedente, si applicherà a una equazione d'un grado qualunque, e farà conoscere i valori prossimi di tutte le radici reali di questa equazione. Non si può nulladimeno disconvenire che il calcolo non divenga laborioso allorchè l'equazione proposta s'eleva un poco di grado; ma in molti casi non sarà necessario ricorrere all'equazione D, ovvero vi suppliremo per dei mezzi, che lo studio dei rami ulteriori dell'Analisi farà conoscere (*).

Farò intanto osservare che le sostituzioni successive dei numeri 0, 1, 2, 3, ec. in luogo di x offrono spesso degl'indizi bastanti per far sospettare l'esistenza delle radici, la cui differenza è minore dell'unità. Nell'esempio, di cui mi occupo, esse danno i resultati

$$+7, +1, +1, +13,$$

i quali ritornano crescenti dopo d'aver decresciuto da $+7$ a $+1$. Questo andamento retrogrado porta naturalmente a cre-

---

(*) *Si può vedere parimente nel* Trattato della Risoluzione dell'Equazioni numeriche *un metodo elegantissimo dato da Lagrange a scanso d'impiegare l'equazione* D.

Molti altri Geometri hanno ancora arricchito questo soggetto d'ingegnosi processi, ma che per altro non mi sembrano tali da poter entrare negli elementi. Del resto le considerazioni fatte qui sopra hanno qualche importanza a solo oggetto, che completano la teoria dell'Equazioni. Quasi giammai l'applicazione del calcolo alla Meccanica, ed alla Fisica conduce a risolvere dell'Equazioni di un grado elevato.

dere che tra i due numeri $+1$ e $+2$ cadano due radici o eguali; o quasi eguali. Per verificare questo sospetto, fa di mestieri moltiplicare l' incognita. Facendo $x=\frac{y}{10}$, si trova

$$y^3-700y+7000=0;$$

equazione, la quale ha due radici positive, una tra 13, e 14, l' altra tra 16, e 17.

Il numero dei tentativi necessarî per iscoprire queste radici non è grandissimo; poichè non è se non tra 10, e 20 che bisogna cercare y; ed i valori di quest' incognita essendo determinati in numeri interi, se ne conchiudono quelli di x, i quali differiscono dal vero meno d' un decimo d' unità.

220. Allorchè i coefficienti dell' equazione, che ci proponiamo di risolvere, sono dei numeri considerevolissimi, è comodo trasformarla in un' altra, di cui i coefficienti sieno contenuti in dei limiti più ristretti. Se si avesse, per esempio,

$$x^4-80x^3+1998x^2-14937x+5000=0,$$

farebbesi $x=10z$; s' otterrebbe

$$z^4-8z^3+19,98z^2-14,937z+0,5=0.$$

In questo resultato ci contenteremo primieramente di prendere i numeri interi, i quali più s' approssimano ai coefficienti, ed avrebbesi in tal maniera

$$z^4-8z^3+20z^2-15z+0,5=0.$$

Troverebbesi senza pena che z ha due valori reali compresi tra 0, e 1, tra 1, e 2; dal che ne segue che quelli della proposta sono tra 0, e 10, e tra 10, e 20.

Qui non parlerò punto della ricerca delle radici immaginarie, perchè la medesima riposa su dei principî, l' esposizione de' quali mi condurrebbe troppo lontano; io la rimetto al *Complemento* di questo Trattato.

221. Lagrange ha dato alle sostituzioni successive una forma, la quale ha il vantaggio di far conoscere immediatamente in ciascuna operazione di quanto ci siamo approssimati alla vera radice, e non esige che se n' abbia in principio il valore, che differisca dal vero meno d' un decimo.

Rappresento per a il numero intero immediatamente al disotto della radice cercata; altro non bisognerà per ottenere questa radice che aumentare a d' una frazione; avremo dunque $x=a+\frac{1}{y}$. L' equazione in y, che resulterà dalla so-

stituzione di questo valore nella proposta, avrà necessariamente una radice maggiore dell' unità; chiamando b il numero intero immediatamente al disotto di questa radice, otterremo per una seconda approssimazione $x = a + \frac{1}{b}$. Ma b non essendo per rapporto a y se non che ciò che a è per rapporto a x, potremo; nella equazione in y, fare $y = b + \frac{1}{y'}$, e y' sarà necessariamente maggiore dell' unità; chiamando b' il numero intero immediatamente al disotto della radice dell' equazione in y', avremo

$$y = b + \frac{1}{b'} = \frac{bb' + 1}{b'}:$$

rimettendo questo valore in quello di x, ne resulterà

$$x = a + \frac{b'}{bb' + 1},$$

per il terzo valore approssimato di x. Ne troveremo un quarto facendo $y' = b' + \frac{1}{y''}$; poichè, se b'' indica il numero intero immediatamente al disotto di y'', avremo

$$y' = b' + \frac{1}{b''} = \frac{b'b'' + 1}{b''},$$

dalla quale

$$y = b + \frac{b''}{b'b'' + 1} = \frac{bb'b'' + b'' + b}{b'b'' + 1}$$

$$x = a + \frac{b'b'' + 1}{bb'b'' + b'' + b},$$

e così di seguito.

222. Passo ad applicare questo metodo all' equazione

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Abbiamo di già veduto (218) che la minore delle radici positive di quest' equazione era tra $\frac{4}{3}$, e $\frac{5}{3}$, vale a dire tra 1, e 2; farò dunque $x = 1 + \frac{1}{y}$, ed avrò

$$y^3 - 4y^2 \times 3y + 1 = 0,$$

Il limite delle radici positive di quest' ultima è 5, e sostituendo sucessivamente o, 1, 2, 3, 4 in luogo di y, riconosceremo ben presto ch' essa ha due radici maggiori dell' unità, cioè, una tra 1, e 2, e l' altra tra 2, e 3; ne resulterà dunque

$$x = 1 + \tfrac{1}{1},\ \text{e}\ x = 1 + \tfrac{1}{2},$$

vale a dire

$$x = 2,\ \text{e}\ x = \tfrac{3}{2}.$$

Questi due valori corrispondono a quelli, che ho trovati tra $\frac{6}{5}$; e $\frac{5}{3}$, tra $\frac{5}{3}$, e $\frac{4}{3}$, e che differiscono tra loro meno d' una unità.

Per portare più avanti il grado d' esattezza della prima radice, la quale corrisponde a $y=1$, faremo

$$y = 1 + \frac{1}{y'},$$

ed avremo

$$y'^3 - 2y'^2 - y' + 1 = 0.$$

Non trovermo in quest' equazione che una sola radice maggiore dell' unità, e compresa tra 2, e 3, il che darà

$$y = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2},$$

di dove

$$x = 1 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{3}.$$

Supponendo in seguito $y' = 2 + \dfrac{1}{y''}$, ne resulterà

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0;$$

troveremo y'' tra 4, e 5, e prendendo il minor limite 4; otterremo

$$y' = 2 + \tfrac{1}{4},\ y = 1 + \tfrac{4}{9} = \tfrac{13}{9},\ x = 1 + \tfrac{9}{13} = \tfrac{22}{13}.$$

Nulla è più facile che proseguire questo metodo, facendo $y'' = 4 + \dfrac{1}{y'''}$, e così in seguito.

Ritorno adesso al secondo valore di x, che ho trovato eguale a $\frac{3}{2}$ per una prima approssimazione, è che corrisponde a $y=2$: fo $y = 2 + \dfrac{1}{y'}$, e sostituisco nell' equazione in y; avrò, dopo di aver cangiati i segni per rendere il primo termine positivo,

$$y'^3 + y'^2 - 2y' - 1 = 0.$$

Quest' equazione non avrà, come la sua corrispondente nell' operazione qui sopra esposta, che una radice, la quale sorpassi l' unità, cioè, tra 1, e 2; prendendo $y'=1$; ne resulterà

$$y = 3,\ x = \tfrac{4}{3}$$

Ponendo ancora

$$y' = 1 + \frac{1}{y''},$$

conseguiremo

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0;$$

equazione, la quale dà y'' tra 4, e 5, da cui ne viene in conseguenza

$$y' = \tfrac{5}{4},\ y = \tfrac{14}{5},\ x = \tfrac{19}{14}.$$

Per andare più avanti, faremo $y'' = 4 + \dfrac{1}{y'''}$; e così di seguito.

L' equazione $x^3 - 7x + 7 = 0$ ha pure una radice negativa compresa tra -3, e -4. Per approssimarvisi di più, faremo $x = -3 - \dfrac{1}{y}$, il che darà

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0,\ y > 20,\ \text{e} < 21,$$

di dove resulterà

$$x = -3 - \tfrac{1}{20} = -\tfrac{61}{20}.$$

Proseguendo più oltre, supporremo $y = 20 + \dfrac{1}{y'}$ ec., e n'otterremo successivamente dei valori di più in più esatti.

Le differenti trasformate in y, y', y'', ec. non avranno mai che una radice maggiore dell' unità fintantochè due, o un maggior numero di radici della proposta, non saranno comprese tra i medesimi limiti a, e $a+1$; ma quando questa circostanza avrà luogo, come l' abbiam veduto nell' esempio qui sopra, troveremo in alcune dell' equazioni in y, y', ec. più valori maggiori della unità, dai quali si partiranno le serie d' equazioni, le quali faranno conoscere in particolare le diverse radici, che la proposta ha tra i limiti a, e $a+1$.

Il Lettore potrà esercitarsi ancora sull' equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

la cui radice reale cade tra 2, e 3; troverà pei valori interi di y, y', ec.

$$10,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 12,\ \text{ec.},$$

e pei valori approssimati di x,

$$\tfrac{2}{1},\ \tfrac{21}{10},\ \tfrac{23}{11},\ \tfrac{44}{21},\ \tfrac{111}{53},\ \tfrac{155}{74},\ \tfrac{576}{275},\ \tfrac{731}{349},\ \tfrac{1307}{624},\ \tfrac{16415}{7837}.$$

Delle proporzioni, e delle progressioni.

223. Abbiamo veduto nell' Aritmetica la definizione, e le proprietà fondamentali della *proporzione*, e dell' *equidiffe-*

renza, vale a dire, di ciò, che si chiama la *proporzione geometrica*, e la *proporzione aritmetica*; applicherò adesso l'Algebra a queste nozioni; ed arriverò con tal mezzo a dei reresultati, i quali sono d'un uso frequente nella Geometria.

Principierò da far osservare che l'equidifferenza, e la proporzione possono esprimersi mediante dell'equazioni. Sieno A, B, C, D i quattro termini della prima; a, b, c, d quelli della seconda: avremo

$$B-A=D-C \text{ (Aritm. 127)}, \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \text{ (Aritm. 111)};$$

equazioni, le quali deggion essere risguardate come equivalenti all'espressioni

$$A.B:C.D, \qquad a:b::c:d,$$

e che danno

$$A+D=B+C, \qquad ad=bc,$$

Segue da ciò che *nell'equidifferenza la somma dei termini estremi eguaglia quella dei termini medî*, e che *nella proporzione il prodotto dei termini estremi è eguale a quello dei termini medî*, nello stesso modo che l'abbiam veduto nell'Aritmetica (127, 113) per mezzo di ragionamenti dei quali l'equazioni qui sopra non ne son che la traduzione (*).

Le proposizioni reciproche delle precedenti dimostransi facilmente; poichè dall'equazioni

$$A+D=B+C, \quad ad=bc$$

si torna immediatamente a

$$D-C=B-A, \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c},$$

ed in conseguenza, *allorchè quattro quantità sono tali che due tra loro diano la medesima somma, o il prodotto medesimo che l'altre due, le prime sono i medî, e le seconde gli estre-*

(*) *L'equazione* ad = bc *dando* $d=\frac{bc}{a}$, *fa vedere che se i quattro numeri* a, b, c, d *sono interi*, *e che* a *e* b *sieno primi tra loro*, c *e* d *sono necessariamente dei moltipli consimili; poichè* a *non può dividere allora* bc *che dividendo* c (97); *e facendo* c = ma, *ne proviene* d = mb.

Di più questa prova che qualunque frazione eguale a una frazione irriducibile non può esser formata che da de' multipli simili dei termini di quest'ultima, *allorchè i termini dell'una e dell'altra sono numeri interi*.

mi (*o reciprocamente*) *d' un' equidifferenza* , *o d' una proporzione*.

Quando $B = C$, l' equidifferenza è detta *continua*; lo stesso è della proporzione allorchè $b = c$; e si ha allora

$$A + D = 2B , \qquad ad = b^2 ;$$

vale a dire, che *in un equidifferenza continua la somma degli estremi è eguale al doppio del medio, ed in una proporzione continua il prodotto degli estremi è eguale al quadrato del medio* Ricavasi da ciò

$$B = \frac{A+D}{2} , \; b = \sqrt{ad} ;$$

la quantità B è il *medio* (ovvero la *media proporzionale aritmetica*) tra A, e D; e la quantità b la *media proporzionale* (*geometrica*) tra a, e d.

Le equazioni fondamentali

$$B - A = D - C , \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

conducono ancora alle seguenti

$$C - A = D - B , \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b} ,$$

le quali fanno vedere che si può, nell' espressioni $A . B : C . D$, $a : b :: c : d$, cangiare i medî di posto, e dedurne $A . C : B . D$, $a : c :: b : d$. In generale potremo fare tutte le trasposizioni di termini, le quali accorderanno coll' equazioni

$$A + D = B + C , \text{ e } ad = bc \text{ (Arim. 114)}.$$

Lascerò adesso da parte l' equidifferenza per non occuparmi che della proporzione.

224. Si può ai due membri dell' equazione $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ aggiungere, e togliere una medesima quantità m, di maniera che si avrà

$$\frac{b}{a} \pm m = \frac{d}{c} \pm m ,$$

riducendo i termini di ciascun membro al denominatore medesimo, conseguiremo

$$\frac{b \pm ma}{a} = \frac{d \pm mc}{c} ;$$

equazione, la quale può mettersi sotto la forma

$$\frac{c}{a}=\frac{d\pm mc}{b\pm ma},$$

e che riducesi a questa proporzione

$$b\pm ma : d\pm mc :: a : c;$$

e siccome $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$, avremo parimente

$$\frac{d\pm mc}{b\pm ma}=\frac{d}{b}$$

ovvero $b\pm ma : d\pm mc :: b : d.$

Queste due proporzioni possono enunciarsi così. *Il primo conseguente, più o meno un certo numero di volte il suo antecedente sta al secondo conseguente, più o meno il medesimo numero di volte il suo antecedente, come il primo termine sta al terzo, ovvero come il secondo sta al quarto.*

Paragonando separatamente le somme tra loro, e le differenze tra loro, avremo

$$\frac{d+mc}{b+ma}=\frac{c}{a}, \quad \frac{d-mc}{b-ma}=\frac{c}{a},$$

d' onde concluderemo

$$\frac{d+mc}{b+ma}=\frac{d-mc}{b-ma},$$

vale a dire

$$b+ma : d+mc :: b-ma : d-mc;$$

oppure, cangiando i medî di posto,

$$b+ma : b-ma :: d+mc : d-mc;$$

e se facciamo $m=1$, avremo solamente

$$b+a : b-a :: d+c : d-c,$$

che enunciasi così:

La somma dei due primi termini sta alla loro differenza, come la somma dei due ultimi sta alla loro differenza.

225. La proporzione $a : b :: c : d$ potendo scriversi come segue

$$a : c :: b : d,$$

avremo $\frac{c}{a}\pm m=\frac{d}{b}\pm m,$

donde $\frac{c\pm ma}{a}=\frac{d\pm mb}{b},$

e finalmente

$$c \pm ma : d \pm mb :: a : b, \text{ ovvero } :: c : d;$$

dal che ne resulta che *il secondo antecedente, più o meno un certo numero di volte il primo, sta al secondo conseguente, più o meno lo stesso numero di volte il primo, come uno qualunque degli antecedenti sta al suo conseguente.*

Questa proposizione può ancora concludersi immediatamente da quella del numero precedente; poichè, cangiando i medî di posto nella proporzione primitiva

$$a : b :: c : d,$$

e quindi applicando la proposizione citata, abbiamo successivamente

$$a : c :: b : d,$$

$$c \pm ma : d \pm mb :: a : b, \quad \text{ovvero} \quad :: c : d;$$

e rendendo in quest' ultima alle lettere a, b, c, d la denominazione, che esse hanno nella proporzione primitiva, si ottiene il precedente enunciato.

Facendo $m=1$, ne ricaveremo le proporzioni particolari

$$c \pm a : d \pm b :: a : b$$
$$:: c : d$$
$$c+a : c-a :: d+b : d-b;$$

il che vuol dire che *la somma, o la differenza degli antecedenti, sta alla somma, o alla differenza de' conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente*; e che *la somma degli antecedenti sta alla loro differenza, come la somma dei conseguenti sta alla loro differenza.*

In generale, se abbiamo

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e} = \frac{h}{g} = \text{ec.},$$

e si faccia $\frac{b}{a} = q$ avremo

$$\frac{d}{c} = q, \quad \frac{f}{e} = q, \quad \frac{h}{g} = q, \text{ ec.};$$

il che darà

$$b = aq, \quad d = cq, \quad f = eq, \quad h = gq, \text{ ec.};$$

e sommando quest' equazioni, membro a membro, otterremo

$$b+d+f+h+\text{ec.} = aq+cq+eq+gq+\text{ec.},$$

ovvero

$$b+d+f+h+\text{ec.} = q(a+c+e+g+\text{ec.})$$

d' onde ne segue

$$\frac{b+d+f+h+\text{ec.}}{a+c+e+g+\text{ec.}}=q=\frac{b}{a}.$$

Enunciasi questo resultato dicendo, che *in una serie di rapporti eguali* a : b : : c : d : : e : f : : g : h, *ec. la somma di un numero qualunque di antecedenti sta alla somma di un egual numero di conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente.*

226. Allorchè si hanno queste due equazioni

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},\ \text{e}\ \frac{f}{e}=\frac{h}{g},$$

si possono moltiplicare i primi membri tra loro, e i secondi membri parimente tra loro, ed otterremo

$$\frac{bf}{ae}=\frac{dh}{cg};$$

equazione equivalente alla proporzione

$$ae : bf : : cg : dh,$$

la quale conseguirebbesi pure moltiplicando ciascun termine della proporzione

$$a : b : : c : d$$

per quello, che gli corrisponde nell' altra

$$e : f : : g : h.$$

Due proporzioni moltiplicate così, termine a termine, si dicon *moltiplicate per ordine*; ed i prodotti, che ne resultano, sono, come vedesi; in proporzione: i nuovi rapporti sono i rapporti *composti* dei rapporti primitivi (*Aritm.* 123).

È facile di convincersi che si arriverebbe egualmente a una proporzione dividendo due proporzioni, termine a termine, ovvero per *ordine*.

227. Allorchè si ha

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},$$

ne possiamo concludere che

$$\frac{b^m}{a^m}=\frac{d^m}{c^m}.$$

lo che dà $a^m : b^m :: c^m : d^m$

d' onde ne segue, che *i quadrati, i cubi, ed in generale le potenze simili di quattro quantità in proporzione sono anch'esse in proporzione.*

La stessa cosa avrebbe luogo per delle potenze frazionarie; poichè

$$\sqrt[m]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}};$$

e

$$\sqrt[m]{\frac{d}{c}} = \frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}};$$

dal che ne resulta

$$\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}}$$

oppure

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d},$$

se $a : b :: c : d$; vale a dire, che *le radici del medesimo grado di quattro quantità in proporzione sono esse pure in proporzione.*

Tali sono i principali punti della Teoria delle proporzioni. Questa Teoria non è stata inventata che per iscoprire delle quantità, paragonandole con altre quantità. Abbiamo conservati per lungo tempo i nomi Latini, ch' eransi dati ai diversi cangiamenti, o trasformazioni, che può subire una proporzione: si principia oggigiorno a non caricarne più la memoria di quelli, che studiano le Matematiche; e tutto l' apparato delle proporzioni diverrebbe inutile, se a loro si sostituissero l' equazioni corrispondenti; lo che darebbe, io penso, più uniformità ai metodi, e più chiarezza alle idee.

228. Dalle proporzioni alle progressioni il passaggio è facile. Avendo concepito nell' equidifferenza continua tre quantità, di cui l' ultima sorpassava la seconda di tanto quanto questa sorpassava la prima, abbiamo subito immaginato di considerare un numero indefinito di quantità a, b, c, d, ec., tali che ciascuna di esse sorpassasse quella, che la precede, d' una quantità δ, di maniera che

$$b = a + \delta, \quad c = b + \delta, \quad d = c + \delta, \quad e = d + \delta, \text{ ec.}:$$

l'insieme di queste quantità si scrive così

$$\div a . b . c . d\ e\ f. \text{ ec.},$$

e si chiamava *progressione aritmetica*: ma io ho creduto dover cangiare questo nome in quello di *progressione per differenza*. (*Vedete* nell' Aritm. *la Nota del n.° 127.*)

Possiamo calcolare un termine qualunque di questa progressione senza il soccorso degl' intermedî. Infatti, se si pone per b il suo valore in quello di c, ne resulterà

$$c = a + 2\delta;$$

mediante quest' ultimo troveremo

$$d = a + 3\delta; \text{ di poi } e = a + 4\delta;$$

e così in seguito: dal che si fa manifesto che chiamando l il termine, il cui posto fosse indicato da n, avrebbesi

$$l = a + (n-1)\delta.$$

Sia, per esempio, la progressione

$$\div 3.5.7.9.11.13.15.17. \text{ ec.};$$

qui il primo termine $a = 3$, la differenza (ovvero la *ragione*) $\delta = 2$; troveremo per l' ottavo termine

$$3 + (8-1)2 = 17,$$

che si otterrebbe ancora calcolando tutti quelli, che lo precedono.

La progressione, che ho considerata, era *crescente*; scrivendola in un ordine inverso, nel modo che segue,

$$\div 17.15.13.11.9.7.5.3.1.-1.-3. \text{ ec.},$$

essa sarebbe *decrescente*. Se ne troverebbe ancora un termine qualunque mediante la formula $a + (n-1)\delta$, osservando che δ debb' essere supposto negativo, poichè allora la differenza dee togliersi da un termine qualunque per ottenere quello, che segue.

229. Arrivasi pure semplicissimamente a conoscere la somma d' un numero qualunque di termini della progressione per differenza. Questa progressione essendo rappresentata da

$$\div a.b.c. \ldots\ldots\ldots\ldots i.k.l,$$

e S designando la somma di tutti i suoi termini avremo

$$S = a+b+c. \ldots\ldots\ldots +i+k+l.$$

Scrivendo i termini del secondo membro di quest' equazione in un ordine inverso del precedente, avremo ancora

$$S = l+k+i. \ldots\ldots\ldots +c+b+a.$$

Se si sommano queste equazioni, e riuniscansi i termini, che

si corrispondono, conseguiremo

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)\ldots\ldots+(i+c)+(k+b)(l+a):$$

ma, per la natura della progressione, si ha, partendo dal primo termine,

$$a+\delta=b,\ b+\delta=c.\ \ldots\ldots\ldots,\ i+\delta=k, k+\delta=l,$$

ed in conseguenza, partendo dall' ultimo,

$$l-\delta=k, k-\delta=i,\ \ldots\ldots\ c-\delta=b,\ b-\delta=a:$$

la somma dell'equazioni corrispondenti fa vedere immediatamente che

$$a+l=b+k=c+i,=\text{ec.};$$

e che in conseguenza

$$2S=n(a+l),$$

di dove ricavasi

$$S=\frac{n(a+l)}{2}.$$

Applicando questa formula alla progressione

$$\div 3.5.7.9.\ \text{ec.},$$

troveremo, per la somma degli otto primi termini

$$\frac{(3+17)8}{2}=80,$$

230. L'equazione

$$l=a+(n-1)\delta,$$

unita a

$$S=\frac{(a+l)n}{2}$$

somministra il mezzo di trovare due qualunque delle cinque quantità a, δ, n, l, e S allorchè si conoscono le altre tre; io non mi fermerò nel trattare ciascuno dei casi, i quali possono presentarsi

231. Abbiamo ricavato dalla proporzione la progressione per *quoziente* (ovvero la progressione *geometrica*), la quale consiste in una serie di termini tali che il quoziente d'un termine diviso per quello, che lo procede, è lo stesso in qualunque parte sieno presi questi due termini. Le serie

$$\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : \text{ec.},$$
$$\div 45 : 15 : 5 : \tfrac{5}{3} : \tfrac{5}{9} : \text{ec.}$$

sono delle progressioni di questo genere; il quoziente (ov-

vero la *ragione*) è 3 nell' una, e $\frac{1}{3}$ nell' altra: la prima crescente, e la seconda decrescente. Ciascuna di queste progressioni forma una serie di rapporti eguali, ed è per questo che desse si scrivono nella maniera qui sopra indicata.

Sieno

$$a, b, c, d, \ldots\ldots\ldots k, l$$

i termini d'una progressione qualunque per quoziente; facendo $\frac{b}{a}=q$, avremo, per la natura di questa progressione,

$$q=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{e}{d}\ldots=\frac{l}{k},$$

ovvero $b=aq$, $c=bq$, $d=cq$, $e=dq$, ... $l=kq$. Ponendo successivamente il valore di b in quello di c, quest' ultimo in quello di d, e così degli altri, otterremo

$$b=aq,\ c=aq^2,\ d=aq^3,\ e=aq^4,\ \ldots\ l=aq^{n-1},$$

denotando per n il posto del termine l oppure il numero dei termini, che si considerano nella progressione proposta.

Mediante la formula $l=aq^{n-1}$ si può calcolare un termine qualunque senza passare per tutti gl' intermedî. Il decimo termine della progressione

$$\div\!\div 2 : 6 : 18 : \text{ec.},$$

per esempio, è eguale a $2\times3^9=39366$.

232. Si può conseguire eziandio la somma di tanti termini quanti vorremo della progressione

$$\div\!\div a : b : c : d : \text{ec.}$$

sommando tra loro l' equazioni

$$b=aq,\ c=bq,\ d=cq,\ e=dq,\ \ldots\ l=kq;$$

poichè ne resulterà

$$b+c+d+e\ldots+l=(a+b+c+d\ldots+k)q;$$

e chiamando S la somma cercata, avremo

$$b+c+d+e\ \ldots\ +l=S-a$$
$$a+b+c+d\ \ldots\ +k=S-l,$$

d'onde concluderemo

$$S-a=q\ (S-l),$$

ed in conseguenza

$$S=\frac{ql-a}{q-1}.$$

Nell' esempio dato qui sopra troverebbesi per la somma dei primi dieci termini della progressione

$$\div 2 : 6 : 18 : \text{ec.}$$

$$\frac{2\times 3^{10}-2}{2}=3^{10}-1=59048.$$

233. Le due equazioni

$$l=aq^{n-1}, \quad S=\frac{ql-a}{q-1}$$

contengono le relazioni, che le cinque quantità a, q, n, l, e S debbono avere tra loro nella progressione per quoziente, e faranno conoscere due qualunque di queste quantità allorchè le altre tre saranno date.

234. Se si sostituisca aq^{n-1} in luogo di l nell'espressione di S, otterremo

$$S=a\frac{(q^n-1)}{q-1}.$$

Allorchè q sorpasserà l' unità, la quantità q^n sarà tanto più grande, quanto il numero n sarà più considerevole; e S sarà suscettibile di sorpassare qualunque quantità, che si voglia, dando a n un valore convenevole, e vale a dire, prendendo un numero convenevole di termini della progressione proposta. Ma, se q è una frazione rappresentata da $\frac{1}{m}$, avremo

$$S=\frac{a\left(\frac{1}{m^n}-1\right)}{\frac{1}{m}-1}=\frac{am\left(1-\frac{1}{m^n}\right)}{m-1}=\frac{am-\frac{a}{m^{n-1}}}{m-1}.$$

ed è evidente che quanto più il numero n diverrà maggiore, più il termine $\frac{a}{m^{n-1}}$ diverrà minore, e più in conseguenza il valore di S si approssimerà alla quantità $\frac{am}{m-1}$, dalla quale esso non differisce che di

$$\frac{a}{(m-1)m^{n-1}}:$$

dunque, quanti più termini prenderemo della progressione proposta, più la loro somma si approssimerà ad $\frac{am}{m-1}$. Essa potrà differirne anco meno di qualunque quantità per quanto piccola si possa assegnare, senza poterle esser mai rigorosamente eguale.

La quantità $\frac{am}{m-1}$, che io denoterò per L, è come vedesi, un limite, al quale le somme parziali rappresentate da S si approssimano di più in più.

Applicando queste considerazioni alla progressione

$$\div 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{16} : \text{ec.},$$

avremo

$$a=1,\ q=\frac{1}{m}=\tfrac{1}{2},$$

di dove

$$m=2,\ L=\frac{am}{m-1}=2;$$

e più che prenderemo termini della divisata progressione, più la loro somma si approssimerà ad esser eguale a 2. Trovasi infatti

$$\begin{array}{ll}
1 & =1=2-1 \\
1+\tfrac{1}{2} & =\tfrac{3}{2}=2-\tfrac{1}{2} \\
1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4} & =\tfrac{7}{4}=2-\tfrac{1}{4} \\
1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8} & =\tfrac{15}{8}=2-\tfrac{1}{8} \\
1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16} & =\tfrac{31}{16}=2-\tfrac{1}{16}
\end{array}$$

L'espressione di L può essere considerata come la somma della progressione decrescente per quoziente continuata all'infinito; ed è appunto in questa maniera che l'espressione medesima si considera ordinariamente; ma non si può frattanto formarsene un'idea ben chiara se non che ravvisandola sotto il punto di vista di un limite.

235. Possiamo ricavare dall'espressione

$$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

tutti i termini, i quali compongono la progressione, di cui essa rappresenta la somma; poichè, se si effettua la divisione

di q^n-1 per $q-1$ (158), si troverà

$$\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{1-q^n}{1-q}=1+q+q^2+q^3+q^4\ldots\ldots+q^{n-1},$$

il che somministra

$$S=a+aq+aq^2\ldots\ldots+aq^{n-1}.$$

Il valore di L sodisfà allo stesso fine allorchè si effettua la divisione di m per $m-1$ nel modo seguente:

$$\begin{array}{r|l} m & m-1 \\ \hline -m+1 & 1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\text{ec.} \\ \hline \end{array}$$

$$-1+\frac{1}{m}$$

$$-\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$$

$$-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}\ \text{ec.}$$

Si divide primieramente m nel modo solito per il primo termine del divisore, il che dà per quoziente 1; si moltiplica questo quoziente pel divisore, e si toglie il prodotto dal dividendo; si divide in seguito il resto 1 per il primo termine del divisore; trovasi per quoziente $\frac{1}{m}$, che si moltiplica pel divisore, e si ha per resto $\frac{1}{m}$; si opera su questo resto come sul precedente. Continuando così, conosceremo ben presto la legge, che seguono tutti i qnozienti parziali, e si comprende che l' espressione $\frac{m}{m-1}$ è equivalente alla serie

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\text{ec.},$$

continuata all'infinito; ponendo per m il suo valore $\frac{1}{q}$, e moltiplicando per a, si ritrova

$$a+aq+aq^2+aq^3+\text{ ec.}$$

per la progressione, di cui L ne esprime il limite.

236. Si riguarda lo sviluppo

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\text{ec.}$$

come il valore delle frazione $\frac{m}{m-1}$ ogni qualvolta che esso è *convergente*, vale a dire, che i termini i quali lo compongono, diminuiscono allontanandosi dal primo.

Infatti se si termina la precedente divisione successivamente al primo, al secondo, al terzo . . . resto, si trovano

i quozienti	ed i resti
1	1
$1+\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$
$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{m^2}$
ec.	ec.;

gli uni si approssimano al vero valore tanto più, quanto più gli altri vanno diminuendo, e questa circostanza non ha luogo che quando m sorpassa l'unità. In tutti gli altri casi non possiamo permetterci di trascurare i resti, i quali sempre aumentando fan vedere che i quozienti s' allontanano sempre più dal vero valore.

Per ischiarir ciò, serve il far successivamente $m=2$, $m=1$, $m=\frac{1}{2}$: la prima supposizione somministra

$$\frac{m}{m-1}=2=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\text{ec.},$$

ed abbiamo digià veduto (234) che difatto la serie, che compone il secondo membro, si approssimava di più in più a 2.

La seconda supposizione dà

$$\frac{m}{m-1}=\tfrac{1}{0}=1+1+1+1+1+1+\text{ec.}$$

Questo resultato $1+1+1+1+$ ec., continuandosi all'infinito, dà pure una quantità infinita, come lo richiede la natura dell' espressione $\frac{1}{0}$; nulladimeno, se, in quest' esempio, non si tenesse conto de' resti, si caderebbe in un' assurdità; poichè, siccome il divisore moltiplicato per il quoziente deve riprodurre il dividendo, bisogna che

$$1=(1+1+1+\ldots\ldots)0;$$

ora; il secondo membro va rigorosamente a zero; avrebbesi dunque $1=0$.

La terza supposizione conduce a delle conseguenze non meno assurde quando si trascurano i resti, e si guarda la serie, che resulta, com' esprimente il valore della frazione, dalla quale essa deriva. Facendo $m=\frac{1}{2}$, si trova

$$\frac{m}{m-1}=-1=1+2+4+8+16+\text{ec.};$$

resultato evidentemente falso.

Queste contraddizioni spariscono osservando che, nel secondo caso, i resti

$$1,\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m^2},\ \frac{1}{m^3},\ \text{ec.}$$

son tutti eguali a 1, e che siccome i medesimi non diminuiscono, non è permesso di trascurarli, per quanto lontano si spinga la serie. Aggiungendo dunque uno di questi resti al secondo membro dell' equazione

$$1=(1+1+1+1+1+\ldots\ldots)0,$$

esse diviene esatta. Nel terzo caso, i resti

$$1,\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m^2},\ \frac{1}{m^3}\ \text{ec.}$$

formano la progressione crescente 1, 2, 4, 8, 16, ec., ed aggiungendo a ciascun quoziente la frazione, che resulta dal resto, che l' accompagna, l' espressioni rigorose di $\frac{m}{m-1}$ sono

$$1+\frac{1}{m-1}$$

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m(m-1)}$$

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2(m-1)},\ \text{ec.}$$

le quali tutte si accordano a dare -1 allorchè $m=\frac{1}{2}$.

Se si prendesse $m=-n$, la frazione $\frac{m}{m-1}$ diverrebbe $\frac{n}{n+1}$; la serie che esprime lo sviluppo di questa frazione, cangerebbesi in

$$1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\text{ec.};$$

e facendovi $n=1$, avrebbesi

$$1-1+1-1+1-1+\text{ec.};$$

sviluppo, il quale diviene alternativamente 1, e zero, e che si allontana in conseguenza, ora per eccesso, ora per difetto, dal vero valore di $\frac{n}{n+1}$, eguale in questo caso a $\frac{1}{2}$: ma la serie qui sopra non essendo convergente, non può dare questo vero valore, e bisogna necessariamente tener conto del resto, qualunque siasi il termine, in cui ci arrestiamo.

Se si suppone nella serie precedente $n=2$, avremo

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}-\text{ec.};$$

serie, di cui le somme parziali 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, ec. sono alternativamente minori, e maggiori del vero valore di $\frac{n}{n+1}$, il quale è $\frac{2}{3}$; ma desse vi approssimano indefinitamente, perchè la serie proposta è convergente.

Benchè le serie *divergenti*, e vale a dire, quelle, i cui termini vanno aumentando, si allontanino sempre più dal vero valore dell' espressione, dalla quale derivano, considerate nulladimeno come sviluppi di queste espressioni, esse possono far conoscere quelle della loro proprietà, le quali non dipendono dalla lor somma.

237. Spingendo qualunque siasi divisione algebrica, come ho fatto qui sopra (235) a riguardo di m per $m-1$, arriveremo sempre ad esprimere il quoziente mediante una serie infinita di termini *monomi*. L' estrazioni delle radici continuate nella stessa maniera sui resti successivi, nel caso delle potenze imperfette, condurranno pure a delle serie infinite; ma queste serie otterrannosi più facilmente per mezzo della formula del *binomio*, conforme lo farò vedere nel *Complemento*, dove tratterò delle serie le più conosciute.

Teoria delle quantità esponenziali, e dei Logaritmi.

238. In tutti i problemi risoluti fin quì le incognite non entravano punto negli esponenti; ma non sarebbe lo stesso se si volesse determinare il numero dei termini di una progressione per quoziente, il cui primo termine, l' ultimo, e la ragione fossero dati. Difatto, avrebbesi per questo l' equazione

$$l=aq^{n-1}\ (231),$$

nella quale l' incognita sarebbe n; e facendo, per abbreviare, $n-1=x$, si otterrebbe $l=aq^x$. I metodi diretti esposti precedentemente non saprebbero risolvere questa equazione; e le quantità tali come x non possono essere rappresentate da nessuno dei segni, dei quali ho già fatto uso. Per gettare un poco di luce sopra questo soggetto, rammenterò, dietro Eulero, il legame che esiste tra le diverse operazioni dell' Algebra, e come ciascuna di esse dia origine a una nuova specie di quantità.

239. Sieno a, e b due quantità che ci proponiamo di sommare insieme. si ha

$$a+b=c;$$

e se da quest' equazione vogliasi ricavare a, o b, si trova

$$a=c-b, \quad b=c-a:$$

ecco come si vede, l' origine della sottrazione, ora, quando quest' ultima operazione non può effettuarsi nell' ordine, come dessa è indicata, il resultato divien negativo.

La somma ripetuta di una medesima quantità genera la moltiplicazione: a denotando il moltiplicatore, b il moltiplicando, e c il prodotto, si ha

$$ab=c;$$

dalla quale ricavasi

$$a=\frac{c}{b}, \quad b=\frac{c}{a};$$

e da ciò nascono la divisione, e le frazioni le quali ne sono la conseguenza, allorchè dessa non può effettuarsi senza resto.

La moltiplicazione ripetuta d' una quantità per se stessa produce le potenze di questa quantità: esprimendo per b il numero delle volte che a è fattore nella potenza, che si considera, si ha

$$a^b=c.$$

Questa equazione differisce essenzialmente dalle precedenti in ciò che le quantità a, e b non v' entrano ambedue della stessa maniera; dal che ne segue che non si può risolvere l' equazione per rapporto all' una come per rapporto all' altra. Se a è quella, che si cerca, una semplice estrazione di radice serve a trovarla, e quest' operazione dà luogo ad una nuova specie di quantità, cioè alle irrazionali; ma la determinazione di b dipende dai metodi particolari, che io farò conoscere allorchè avrò esposte le principali proprietà dell' equazione $a^b=c$.

240. È facile vedere che conservando lo stesso valore per

la lettera a, ch' io supporrò al di sopra della unità, e variando convenevolmente quello di q, potremo ottenere per c tutti i numeri possibili. Difatto, facendo $b=0$, si ha $c=1$, poi allorchè b crescerà, i valori corrispondenti di c sorpasseranno di più in più la unità, e potranno aumentare tanto quanto vorremo. Il contrario avrà luogo se si prenda b negativo; l' equazione $a^b=c$ cangiandosi in $a^{-b}=c$, ovvero

$\frac{1}{a^b}=c$, i valori di c anderanno sempre diminuendo, e potranno divenire tanto piccolo quanto vorremo. Si possono dunque dalla medesima equazione ricavare tutti i numeri positivi possibili, sì interi che frazionarî, nel caso ove a sorpassi la unità. Sarebbe lo stesso se si avesse $a<1$: solamente i valori di c progredirebbero in senso inverso del caso precedente; ma supponendo $a=1$, si troverebbe sempre $c=1$, qualunque valore si desse a b: si dee dunque, in tutto ciò che seguirà, riguardare a come differente essenzialmente dalla unità.

Per meglio indicare che a non cangia, e che le altre due quantità a, e c sono indeterminate, io le rappresenterò per le lettere x, e y, ed avrò l' equazione $a^x=y$, nella quale a ciascun valore di y corrisponde un valore di x, di maniera che una di queste quantità è determinata dall' altra, e reciprocamente.

241. Questa generazione di numeri per mezzo delle potenze d' un solo è importantissima non solamente in rapporto all' Algebra, ma altresì pei soccorsi, ch' ella somministra per abbreviare i calcoli numerici. Difatto, se si considera un altro numero y', e s' indichi per x' il valore corrispondente di x avremo $a^{x'}=y'$, ed in conseguenza, se si moltiplica y per y', conseguiremo

$$yy'=a^x\times a^{x'}=a^{x+x'}$$

se si divide, troveremo

$$\frac{y'}{y}=\frac{a^{x'}}{a^x}=a^{x'-x};$$

finalmente, se si prenda la potenza m di y, e la radice n^{ma}, avremo

$$y^m=(a^x)^m=a^{mx}$$

per l' una, e

$$y^{\frac{1}{n}}=(a^x)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{x}{n}}$$

per l' altra.

Segue dai due primi resultati, che conoscendo gli esponen-

ti x, e x' relativi ai numeri y, e y', troveremo prendendone la loro somma, l'esponente che corrisponde al prodotto yy', e, prendendone la loro differenza, quello che corrisponde al quoziente $\frac{y'}{y}$. Le due ultime equazioni fanno vedere, che l'esponente relativo alla potenza m^{ma} di y si ottiene mediante una semplice moltiplicazione, e quello, che corrisponde alla radice n^{ma}, con una semplice divisione.

È facile concluder da ciò, che se si avesse una Tavola, nella quale, allato di ciascuno dei numeri y, si trovassero i valori corrispondenti di x, di maniera che essendo dato y si potesse avere x, e reciprocamente, *la moltiplicazione di due numeri qualunque si ridurrebbe ad una semplice somma*; perchè, in vece di operare sopra questi numeri, si sommerrebbero i valori di x, che vi si rapportano, e cercando dipoi nella Tavola il numero, al quale corrisponde questa somma, avrebbesi così il dimandato prodotto. Il quoziente dei numeri proposti troverrebbesi nella medesima Tavola di fronte alla differenza dei valori di x, che loro corrispondono, e *la divisione si effettuerebbe allora mediante una sottrazione.*

Questi due esempî fanno bastantemente conoscere l'utilità, di cui posson essere delle Tavole simili a quelle, delle quali ho parlato; così l'uso loro ne è molto esteso fino da Nepero, il quale fu il primo ad immaginarle. I valori di x vi sono indicati sotto il nome *di logaritmi*, ed in conseguenza *i logaritmi sono gli esponenti delle potenze, alle quali bisogna alzare un numero invariabile per dedurne successivamente tutti i numeri possibili.*

Il numero invariabile si chiama base *delle Tavole, o del Sistema dei logaritmi*;

In seguito rappresenterò il logaritmo di y per ly; avremo $x=ly$, ed a motivo di $y=a^x$, otterremo $y=a^{ly}$.

242. Le proprietà dei logaritmi essendo indipendenti dai valori particolari del numero a, ovvero dalla loro base, ne segue che si possono formare un'infinità di Tavole differenti dando a questo numero tutti i valori possibili, diversi dalla unità. Prendendo, per esempio, $a=10$, avremo $y=(10)^{ly}$, e troveremo immediatamente che i numeri

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, ec.,

i quali son tutti delle potenze di 10, hanno per logaritmi, in quest'ipotesi, i numeri

0, 1, 2, 3, 4, 5, ec.

Possiamo digià verificare su questa serie le proprietà, che ho enunciate nel num.° precedente: sommando i logaritmi di 10, e di 1000, i quali sono 1, e 3, si vede tosto che la lor somma 4 si trova sotto il 10000, che è il prodotto dei numeri proposti.

243. I logaritmi dei numeri intermedî tra 1 e 10, 10 e 100, 100 e 1000, ec. non possono ottenersi che per approssimazione. Se si trattasse, per esempio di avere il logaritmo di 2, bisognerebbe risolvere l' equazione $(10)^x=2$, applicandovi il metodo dato nel n.° 221., e trovare in primo luogo il numero intero, che più si approssima al valore di x. Si vede facilmente che x è tra 0, e 1, poichè $(10)^0=1$, $(10)^1=10$; faremo dunque $x=\frac{1}{z}$, ed otterremo $(10)^{\frac{1}{z}}=2$, oppure $10=2^z$; ora z si trova tra 3, e 4: supporremo dunque $z=3+\frac{1}{z'}$, e ne resulterà

$$10=2^{3+\frac{1}{z'}}=2^3\times 2^{\frac{1}{z'}}=8\times 2^{\frac{1}{z'}},$$

ovvero $$2^{\frac{1}{z'}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4},$$

oppure finalmente $$2=(\tfrac{5}{4})^{z'}.$$

Il valore di z' cadendo tra 3, e 4, faremo

$$z'=3+\frac{1}{z''};$$

avremo

$$2=(\tfrac{5}{4})^{3+\frac{1}{z''}}=(\tfrac{5}{4})^3 . (\tfrac{5}{4})^{\frac{1}{z''}},$$

dalla quale equazione ricaveremo

$$(\tfrac{5}{4})^{\frac{1}{z''}}=2(\tfrac{4}{5})^3=\tfrac{128}{125}, \text{ ovvero } (\tfrac{128}{125})^{z''}=\tfrac{5}{4};$$

e dopo un piccol numero di tentativi troveremo che z'' è tra 9, e 10. Nella stessa maniera potremo inoltrarci quanto vorremo, ma siccome io non ho indicato questo metodo che per far vedere la possibilità di trovare i logaritmi di tutti i numeri mi limiterò a supporre $z''=9$; e risalendo, otterremo

$$z'=\tfrac{28}{9},\ z=\tfrac{93}{28},\ x=\tfrac{28}{93}.$$

Questo valore di x, ridotto in decimali, è esatto fino alla quarta inclusivamente, poichè desso dà

$$x=0,30107;$$

e dei calcoli portati ad un maggior grado di rigore ci hanno fatto conoscere che, spingendo fino a 7 decimali, avrebbesi $x=0,3010300$.

Per interpretare questo valore di x come quello di un esponente, bisogna concepire che, se si alza il num.° 10 alla potenza indicata dal num.° 3010300, e se ne estragga dal resultato una radice del grado 10000000, avremo un numero moltissimo approssimato a 2, e vale a dire, che $(10)^{\frac{3010300}{10000000}}=2$, con pochissima differenza: il primo membro è un poco più grande di 2, ma il numero $(10)^{\frac{3010299}{10000000}}$ sarebbe più piccolo (*).

(*) *Il metodo indicato in questo numero non sarebbe praticabile per dei numeri un poco grandi, ma eccone un altro dato da Long, Geometra Inglese, nelle* Transazioni Filosofiche *per l'anno 1724. n.° 339, qual metodo può essere utilissimo.*

La determinazione di x *nell' equazione* $(10)^x=y$ *essendo laboriosissima, si può procedere in un ordine inverso, cioè darsi* x *per ottenere* y, *e formare una Tavola dei valori di* y *corrispondenti a quelli di* x, *la quale servirà in seguito, come vedremo, a determinare* x *per* y.

Si prendono in primo luogo per x *dei valori da* 0, 1 *fin a* 0, 9, *e tutto si riduce a determinare il valore di* y, *il quale corrisponde a* $x=0,1$, *ovvero che è* $(10)^{\frac{1}{10}}$, *perchè gli altri valori di* y, *cioè* $(10)^{\frac{2}{10}}$ $(10)^{\frac{3}{10}}$, *ec.*, *sono le* 2.e, 3.e, *ec. potenze della prima.*

L'estrazione della radice quadrata fa primieramente conoscere

$$(10)^{\frac{1}{2}} \text{ ovvero } (10)^{\frac{5}{10}}=3,162277560,$$

poi estraendo la radice quinta da questo resultato si perviene a

$$(10)^{\frac{1}{10}}=1,258925412.$$

Mediante un metodo simile ricaveremo da

$$(10)^{\frac{1}{10}}=1,258925412.$$

il valore di

$$\sqrt{(10)^{\frac{1}{10}}}=(10)^{\frac{1}{20}}=(10)^{\frac{5}{100}}=1,122018454;$$

poi prendendo la radice quinta, formeremo

$$(10)^{\frac{1}{100}}=1,023292992;$$

e risalendo alle potenze 2.a, 3.a . . . , 9.a *ne otterremo i valori di* y *corrispondenti a quelli di* x, *da* 0,01 *fino a* 0,09.

244. Moltiplicando successivamente per 2, 3, 4, ec. il logaritmo di 2; ottengonsi quelli dei numeri 4, 8, 16, ec.,

---

Si concepisce facilmente che in questa maniera formeremo ancora i valori di y per quelli di x, da 0,001 fino a 0,009; quindi da 0,0001, fino a 0,0009, e che potremo comporre la Tavola seguente.

Log.	Numeri Natur.	Log.	Numeri Natur.
0,9	7,943282347	0,00009	1,000207254
8	6,309573445	8	1,000184224
7	5,011872336	7	1,000161194
6	3,981071706	6	1,000138165
5	3,162277660	5	1,000115136
4	2,511886432	4	1,000092106
3	1,995262315	3	1,000069080
2	1,584893193	2	1,000046053
1	1,258925412	1	1,000023026
0,09	1,230268771	0,000009	1,000020724
8	1,202264435	8	1,000018421
7	1,174897555	7	1,000016118
6	1,148153621	6	1,000013816
5	1,122018454	5	1,000011513
4	1,096478196	4	1,000009210
3	1,071519305	3	1,000006908
2	2 047128548	2	1,000004605
1	1,023292992	1	1,000002302
0,009	1,020939484	0,0000009	1,000002072
8	1,018591388	8	1,000001842
7	1,016248694	7	1,000001611
6	1,013911386	6	1,000001381
5	1,011579454	5	1,000001151
4	1,009252886	4	1,000000921
3	1,006931669	3	1,000000690
2	1,004615794	2	1,000000460
1	1,002305238	1	1,000000230
0,0009	1,002074475	0,00000009	1,000000207
8	1,001843766	8	1,000000184
7	1,001613109	7	1,000000161
6	1,001382506	6	1,000000138
5	1,001151956	5	1,000000115
4	1,000921459	4	1,000000092
3	1,000691015	3	1,000000069
2	1,000460623	2	1,000000046
1	1,000230285	1	1,000000023

i quali sono le 2.e, 3.e, 4.e, ec. potenze di 2.

Sommando col logaritmo di 2 i logaritmi di 10, di 100, di 1000, ec., se ne deducono quelli di 20, di 200, di 2000, ec., ed è evidente che basta di avere i logaritmi dei numeri primi per trovare i logaritmi di tutti i numeri composti, i quali non possono essere che delle potenze: o dei prodotti di numeri primi. Il numero 210, per esempio, essendo eguale a

$$2\times3\times5\times7,$$

Per mezzo di questa Tavola troveremo il logaritmo di un numero qualunque, dividendolo per 10 un numero di volte sufficiente. Affine di ottener, per esempio, quello di 2549, divideremo in primo luogo questo numero per $(10)^3$, oppure 1000, che è la più gran potenza di 10, coll' esponente intero che esso possa contenere, ed avremo

$$2549=(10)^3\times2,549;$$

poi cercheremo nella Tavola la potenza di 10 immediatamente al disotto di 2,549, troveremo

$$(10)^{0,4}=2,511886432,$$

e dividendo 2,549 per quest' ultimo numero, conseguiremo

$$2,549=(10)^{0,4}\times1,014775177.$$

Cercando come sopra nella Tavola la potenza di 10 immediatamente al disotto di 1,014775177, troveremo

$$(10)^{0,006}=1,013911386;$$

poi dividendo per questo numero il quoziente precedente 1,014775177, avremo un terzo quoziente

$$1,000851742.$$

Continueremo ad operare in questa maniera fino a che non siamo arrivati a un quoziente, il quale non differisca dall'unità che nell'ordine dei decimali, che ci siamo proposti di trascurare.

Risguardando qui il terzo quoziente come eguale all'unità, il numero proposto sarà decomposto in fattori, i quali saranno delle potenze di 10, poichè avremo

$$2549=(10)^3\times(10)^{0,4}\times(10)^{0,006}=(10)^{3,406}$$

dal che rendesi manifesto che 3,406 è il logaritmo del numero 2549. Spingendo le divisioni fino al numero di 7, troveremo che questo logaritmo è 3,406369.

La medesima Tavola serve ancora più facilmente per trovare un numero col mezzo del suo logaritmo: eccone qui un esempio.

il suo logaritmo sarà eguale a

$$l2+l3+l5+l7,$$

ed a motivo che $5=\frac{10}{2}$, avremo

$$l5=l10-l2.$$

245. I logaritmi, i quali son sempre espressi in decimali, sono necessariamente composti di due parti, cioè, delle unità, poste alla sinistra della virgola, e delle cifre decimali, le quali si trovano alla destra. La prima parte porta il nome di *caratteristica*, perchè nei logaritmi, che io considero per adesso, i quali resultano dalla supposizione di $a=10$, e si chiamano *logaritmi ordinarî*, questa parte fa conoscere in qual ordine d' unità cada il numero, di cui abbiamo il logaritmo. Tutti i logaritmi dei numeri tra 1, e 10 cadendo tra 0, e 1, hanno necessariamente zero per caratteristica: tutti quelli dei numeri compresi tra 10, e 100, hanno 1; tutti quelli dei numeri compresi tra 100, e 1000 hanno 2: in generale, la caratteristica di un logaritmo ha tante unità quante cifre ha il numero proposto meno una.

246. Un' osservazione non meno importante è questa, che i logaritmi dei numeri, i quali sono decupli gli uni degli altri, hanno la medesima parte decimale: per esempio.

54360	ha per log.	4,7352794,
5436		3,7352794,
543,6		2,7352794,
54,36		1,7352794,
5,436		0,7352794;

Sia 2,547 il logaritmo dato; il numero cercato sarà

$$(10)^{2,547}=(10)^2\times(10)^{0,5}\times(10)^{0,04}\times(10)^{0,007};$$

desso sarà dunque eguale al prodotto dei numeri

$$(10)^2 =100$$
$$(10)^{0,5} =3,162277660$$
$$(10)^{0,04} =1,096478196$$
$$(10)^{0,007}=1,016248694$$

presi nella Tavola precitata; ed avremo in conseguenza

$$2,547=l352,357.$$

Il Sig. Dodson ha pubblicata in Inghilterra, sotto il titolo d'anti-logarithmic-canon, *una Tavola della medesima specie di quella qui esposta, ma, molto più estesa, e il cui oggetto è di far trovare a qual numero corrisponda un logaritmo dato.*

poichè ciascuno di questi numeri essendo il quoziente di quello, che lo precede, diviso per 10, il logaritmo di uno si ottiene togliendo una unità dalla caratteristica dell'altro (241, 242).

247. Dietro a ciò, che è stato detto nel n.° 240, i logaritmi dei numeri frazionarî sono negativi nell' ipotesi attuale, e si deducono facilmente da quelli dei numeri interi, osservando che una frazione rappresenta il quoziente della divisione del numeratore pel denominatore. Quando il numeratore è minore del denominatore, il suo logaritmo è pure più piccolo di quello del denominatore, ed in conseguenza, togliendo l'ultimo dal primo, si ha un resto negativo.

Affin di ottenere il logaritmo della frazione $\frac{1}{2}$, per esempio, toglieremo da 0, che esprime il logaritmo di 1, la frazione 0,3010300, la quale rappresenta quello di 2, ed otterremo

$$-0,3010300.$$

Togliendo da 0 il numero 1,3010300, che è il logaritmo di 20, avremo il logaritmo di $\frac{1}{20}$ eguale a

$$-1,3010300;$$

il logaritmo di 3 essendo 0,4771213, quello di $\frac{2}{3}$ sarà

$$0,3010300-0,4771213=-0,1760913.$$

248. Dalla maniera, mediante la quale si ottengono i logaritmi delle frazioni, fatta astrazione dal loro segno, si vede che essi appartengono (241) al quoziente della divisione del denominatore per il numeratore, e corrispondono in conseguenza al numero, per il quale bisognerebbe dividere l'unità, onde ottenere la frazione proposta. Difatto $\frac{2}{3}$, per esempio, può esser posto sotto la forma $\frac{1}{\frac{3}{2}}$, $l\frac{3}{2}=l3-l2=0,1760913$.

Sarebbe poco comodo, per trovare il valore della frazione, alla quale appartiene un logaritmo negativo dato; cercare il numero, a cui corrisponde allorchè desso è positivo, poichè bisognerebbe effettuare la divisione della unità per questo numero; ma, se si toglie questo logaritmo da 1, 2, 3, ec. unità, il resto apparterrà al numero, il quale esprime la frazione cercata allorchè si converte in decimali, poichè questa sottrazione corrisponde alla divisione dei numeri 10, 100, 1000, ec. per il numero del logaritmo proposto.

Sia, per esempio, $-0,3010300$: se non avendo riguardo al suo segno, si tolga questo logaritmo da 1, ovvero da 1,0000000, il resto 06989700 corrispondendo a 5, fa vedere che la frazione cercata è eguale a 0,5 poichè abbiamo supposto l'unità composta di 10 parti.

Se, allorchè cercasi il logaritmo d' una frazione, si concepisca subito l' unità formata di 10, oppure di 100, di 1000,ec. parti, ovvero, che torna lo stesso, se si aumenti la caratteristica del logaritmo del numeratore d' un numero d'unità sufficiente perchè se ne possa fare la sottrazione di quello del denominatore, avremo in siffatta maniera un logritmo positivo, il quale potrà impiegarsi in luogo di quello, che abbiamo indicato più alto.

Affine di porre dell' uniformità nei calcoli, si aumenta il più spesso di 10 unità la caratteristica del logaritmo del numeratore. Relativamente alla frazione $\frac{2}{3}$, per esempio, si ha

$$10,3010300-0,4771213=9,8239087.$$

È facil vedere che questo logaritmo sorpassa di 10 unità il logaritmo negativo$-0,1760913$, e che in conseguenza, ogni qual volta lo sommeremo con altri, introdurremo 10 unità di più nel resultato; ma la sottrazione di queste 10 unità non dee contarsi per un'operazione, ed allorchè la medesima sottrazione sarà effettuata, avremo eseguita nel tempo stesso quella di 0,1760913. Difatto, sia N il numero, al quale si aggiunge il logaritmo positivo 9,8239087; il resultato dell' operazione si rappresenterà da

$$N+10-0,1760913\,;$$

e se si toglie 10, avremo solamente

$$N-0,1760913.$$

Dopo ciò, che precede, si cangia la sottrazione in una somma impiegando, in luogo del numero da sottrarsi, il suo *complemento aritmetico*, e vale a dir quello che resta allorchè togliesi questo numero da uno dei numeri 10, 100, 1000, ec., resultato, il quale si ottiene togliendo da 10 le unità semplici del numero proposto, e tutte le altre da 9: ciò fatto, si aggiunge questo complemento al numero, dal quale bisognerebbe sottrarre quello proposto, e si toglie dalla somma un'unità dell' ordine stesso, sul quale abbiamo preso il complemento.

È evidente che, se il complemento sia ripetuto più volte, bisognerà togliere, dopo la somma, tante unità dell' ordine, sul quale è stato preso il complemento, quante unità vi sono nel suo moltiplicatore; e per la stessa ragione, se s' impiegano più complementi, sarà necessario di togliere per ciascuno la unità, sulla quale è stato preso, ovvero tante unità quanti sono i complementi, se tutti sien presi sopra una stessa unità.

Qualche volta questa sottrazione non può effettuarsi; il re-

sultato è allora il Complemento aritmetico del logaritmo di una frazione, e corrisponde nelle Tavole all' espressione di questa frazione convertita in decimali. Quando restano ancora 10 unità da togliersi dalla caratteristica, che è il caso il più ordinario, è lo stesso come se si fosse moltiplicato per 10000000000 il numeratore della frazione cercata, onde effettuarne la divisione per il denominatore; la caratteristica del logaritmo del quoziente fa conoscere qual sia l' ordine il più elevato delle unità, che contiene questo quoziente, per rapporto a quelle del dividendo. Nel 9,8239087 la caratteristica 9 dimostra che il quoziente debbe avere una cifra di meno del numero, per il quale si è moltiplicata l' unità; ed in conseguenza se, per ridurre il quozieute al suo vero valore, si separano 10 cifre decimali, la sua prima cifra significativa verso la sinistra sarà delle decime parti; non si troverebbero che delle centesime, delle millesime, ec pei numeri, i cui complementi aritmetici avessero le caratteristiche 8,7, ec.

249. Ciò, che abbiamo detto sul *Sistema* di logaritmi, nel quale $a=10$, contiene i principî generali necessarî per l' intelligenza delle Tavole, le quali son quasi tutte precedute da un' Istruzione relativa alla loro disposizione particolare, ed alla maniera di servirsene, alla qual' Istruzione rimando i Lettori. Io indicherò loro frattanto le Tavole di Callet (edizione stereotipa), e quelle di Borda perchè sono estesissime, e comodissime.

250. Quando si ha il logaritmo di un numero y per un valore particolare di a, ovvero per una base particolare, è facile di ottenere il logaritmo del medesimo numero in qualunque altro sistema. Difatto, se si ha $a^x=y$, per un' altra base A avremo $A^X=y$, X essendo differente da x, ricaveremo da ciò $A^X=a^x$. Prendendo i logaritmi relativamente al Sistema, la cui base è a, otterremo

$$lA^X=la^x:$$

ora, $la^x=x$ per ipotesi, e $lA^X=XlA$ (241): dunque $XlA=x$,

oppure $X=\frac{x}{lA}$: ma considerando A come base, X sarà il

logaritmo di y nel Sistema relativo a questa base: se dunque s' indica quest'ultimo per Ly, affine di distinguerlo dall' altro, avremo

$$Ly=\frac{ly}{lA},$$

e troveremo il logaritmo di y nel secondo sistema dividendo il suo logaritmo preso nel primo per il logaritmo della base del secondo sistema.

L'equazione precedente somministra parimente $\frac{\mathrm{l}y}{\mathrm{L}y}=\mathrm{l}A$, il che fa vedere che qualunque sia il numero y, esiste tra i logaritmi $\mathrm{l}y$, e $\mathrm{L}y$ un rapporto invariabile rappresentato dal $\mathrm{l}A$.

251. In qualunque sistema si sia, il logaritmo di 1 è sempre zero; poichè, qualunque sia a, abbiamo sempre $a^0=1$. Allorchè a è >1, i logaritmi essendo suscettibili d'accrescimento indefinito a misura che i numeri aumentano, si dice che dessi divengono infiniti nel medesimo tempo che i numeri; e siccome, allorchè y è un numero frazionario, si ha $y=\frac{1}{a^x}=a^{-x}$, si vede che più y diminuisce, più x dee aumentare negativamente, ma che tuttavia non si può mai assegnare per x un numero il quale renda y esattamente nullo. Tale è il senso, nel quale bisogna intendere che *il logaritmo di zero è eguale all' infinito negativo*, così come trovasi in molte Tavole.

252. Darò adesso alcuni esempî dell' uso, che si può fare dei logaritmi nella valutazione numerica delle formule. Segue dal n.° 241, e dalla definizione dei logaritmi, che ci viene somministrata dall'equazione $a^{\mathrm{l}y}=y$, che

$$\mathrm{l}(AB)=\mathrm{l}A+\mathrm{l}B\,,\quad \mathrm{l}\left(\frac{A}{B}\right)=\mathrm{l}A-\mathrm{l}B\,,$$

$$\mathrm{l}A^m=m\,\mathrm{l}A\,,\qquad \mathrm{l}A^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\,\mathrm{l}A.$$

Applicando queste regole alla formula

$$\frac{A^2\sqrt{B^2-C^2}}{C\sqrt[5]{D^3EF}},$$

la quale è assai complicata, si trova

$$\mathrm{l}(A^2\sqrt{B^2-C^2})=\mathrm{l}[A^2\sqrt{(B+C)(B-C)}]=$$
$$2\,\mathrm{l}A+\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(B+C)+\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(B-C)\,,$$
$$\mathrm{l}(C\sqrt[5]{D^3EF})=\mathrm{l}C+\tfrac{3}{5}\mathrm{l}D+\tfrac{1}{5}\mathrm{l}E+\tfrac{1}{5}\mathrm{l}F\,,$$

ed in conseguenza

$$\mathrm{l}\left(\frac{A^2\sqrt{B^2-C^2}}{C\sqrt[5]{D^3E^F}}\right)$$

$$2\mathrm{l}A+\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(B+C)+\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(B-C)-\mathrm{l}C-\tfrac{3}{5}\mathrm{l}D-\tfrac{1}{5}\mathrm{l}E-\tfrac{1}{5}\mathrm{l}F.$$

Se si prendessero i complementi aritmetici di $\mathrm{l}C$, $\tfrac{3}{5}\mathrm{l}D$, $\tfrac{1}{5}\mathrm{l}E$. $\tfrac{1}{5}\mathrm{l}F$, e s' indicassero per C', D', E', F', in luogo del resultato precedente avrebbesi

$$2\mathrm{l}A+\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(B+C)+\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(B-C)+C'+D'+E'+F',$$

osservando di togliere dalla somma tante nnità dell' ordine, sul quale abbiamo presi i complementi, quanti sono questi complementi, e vale a dire 4. Allorchè saremo pervenuti al logaritmo della formula proposta, le Tavole faranno conoscere il numero, al quale questo logaritmo appartiene, e che è il valore cercato.

253. L' nso il più frequente dei logaritmi è quello, che se ne fa per trovare il quarto termine di una proporzione. È manifesto che, se $a : b :: c : d$, avremo

$$d=\frac{bc}{a},\quad \text{di dove}\quad \mathrm{l}d=\mathrm{l}b+\mathrm{l}c-\mathrm{l}a,$$

vale a dire, che *il logaritmo del quarto termine cercato è eguale alla somma dei logaritmi de' due medi diminuita del logaritmo dell' estremo cognito*, ovvero *alla somma dei logaritmi dei medi più il complemento aritmetico del logaritmo dell' estremo cognito.*

254. Se si prendono i logaritmi di ciascun membro dell'equazione $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, la quale esprime il carattere della proporzione, avremo

$$\mathrm{l}b-\mathrm{l}a=\mathrm{l}d-\mathrm{l}c \ (252),$$

dalla quale resulta che i quattro logaritmi

$$\mathrm{l}a : \mathrm{l}b : \mathrm{l}c : \mathrm{l}d$$

formano nn' equidifferenza (223).

La serie dell' equazioni

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{c}{d},\ \text{ec.}\ (231)$$

conduce parimente a

$$\mathrm{l}b-\mathrm{l}a=\mathrm{l}c-\mathrm{l}b=\mathrm{l}d-\mathrm{l}c=\mathrm{l}e-\mathrm{l}d,\ \text{ec.},$$

e se ne conclude che alla progressione per quozienti

$$\div a : b : c : d : e, \text{ ec.}$$

corrisponde la progressione per differenze

$$\div \text{l}a \,.\, \text{l}b \,.\, \text{l}c \,.\, \text{l}d \,.\, \text{l}e, \text{ ec.},$$

e che in conseguenza i *logaritmi dei numeri in progressione per quozienti sono in progressione per differenze.*

255. Se si avesse l'equazione $b^z = c$, si risolverebbe facilmente col mezzo dei logaritmi; poichè $\text{l}b^z$ essendo eguale a $z\text{l}b$, avrebbesi $z\text{l}b = \text{l}c$, ed in conseguenza $z = \frac{\text{l}c}{\text{l}b}$.

L'equazione $b^{c^z} = d$ si tratterebbe nella stessa maniera; facendo primieramente $c^z = u$, verrebbe

$$b^u = d, \; u\text{l}b = \text{l}d, \; u = \frac{\text{l}d}{\text{l}b}, \text{ ovvero } c^z = \frac{\text{l}d}{\text{l}b};$$

prendendo nuovamente i logaritmi troverebbesi

$$z\text{l}c = \text{l}\left(\frac{\text{l}d}{\text{l}b}\right) = \text{ll}d - \text{ll}b, \text{ e } z = \frac{\text{ll}d - \text{ll}b}{\text{l}c}.$$

In quest' ultima espressione $\text{ll}b$ denota il logaritmo del logaritmo di b, e si ottiene considerando questo logaritmo come un numero. Le quantità b^z, b^{c^z}, e tutte quelle, che ne derivano, si chiamano *esponenziali.*

Problemi relativi all' interesse del denaro.

156. La Teoria delle progressioni per quozienti, e quella dei logaritmi trovano la loro applicazione nelle speculazioni concernenti l' interesse del danaro. Per intendere ciò, che adesso esporrò sopra questo soggetto, bisogna sapere che i vantaggi, che procura una somma di danaro a quello, che la impiega, tanto al cambio del commercio, quanto a far eseguire dei lavori produttivi, sono tanto più grandi quante più sono le volte che desso può rinnovar questi cambi, o moltiplicare questi valori. Segue da ciò che quello, il quale prenda una somma di danaro per farla fruttare, debbe rendendo questa somma al fine di un certo tempo, unirvi una retribuzione per compensare il prestatore dei vantaggi, che ei avrebbesi procurati se l'avesse impiegata egli stesso. Tal' è l' idea, che dobbiamo farci dell' interesse del danaro. Per determinarlo si paragonano tutte le somme a quella di 100 lire presa per unità, e si conviene di ciò che dee fruttare quest' ultima alla fine di un tempo dato, per esempio, di un anno. Non

è qui il luogo di esporre le considerazioni, che in ciascun genere di speculazione fanno alzare, ed abbassare il frutto del danaro: desse non possono entrare che negli Elementi di Aritmetica politica, e commerciale, i quali debbon essere preceduti da quelli del Calcolo delle probabilità; ed il mio oggetto in ciò, che segue, non è che di risolvere alcuni dei problemi, che offrono le progressioni per quozienti.

Supporrò in generale, che siasi convenuto di dare al fine di un anno per la somma 1 un interesse denotato da r; è evidente che l'interesse di una somma 100 pel medesimo tempo sarà 100 r, che quello di una somma qualunque a sarà espresso da ar; e, se s' indica quest' ultimo per α, avremo

$$\alpha = ar$$

Mediante questa relazione, è facile trovar il frutto per una somma qualunque allerchè si ha quello, che danno 100 lire, ovvero qualunque altra somma in un tempo cognito; questo problema si chiama *calcolo d'interese semplice*.

257. Ma, se il prestatore in vece di ritirare ciascun anno il frutto del capitale, che ha guadagnato, lo lascia in mano del debitore per farlo fruttare unitamente alla somma primitiva nell'anno seguente, al fine di quest' anno il capitale avrà acquistato un valore, il quale lo troveremo nel modo seguente: il capitale primitivo essendo a, aumentato dell' interesse ar, diverrà, alla fine del primo anno,

$$a+ar=a(1+r).$$

Se adesso si faccia

$$a(1+r)=a',$$

il frutto della somma a' per un anno essendo $a'r$, quello della somma $a(1+r)$ sarà per un secondo anno, $ar(1+r)$; e nello stesso modo che al fine del primo anno il capitale a aumentato del frutto, che dovea dare, è divenuto $a(1+r)$, il capitale a' diverrà alla fin del secondo anno

$$a'(1+r)=a(1+r)^2=a''.$$

Se il datore del danaro non ritiri il capitale a'' neppure alla fin di quest' anno, e che lo lasci per un terzo anno, alla fine di questo gli sarà dovuto, secondo ciò che precede,

$$a''(1+r)=a(1+r)^3=a'''.$$

Si vede facilmente che dopo il quarto anno a''' sarà cangiato in

$$a'''(1+r)=a(1+r)^4,$$

e così di seguito, e che in conseguenza la somma data a frutto in principio, e le somme da rendersi alla fine del primo,

del secondo, del terzo, del quarto, ec. anno formano questa progressione per quozienti

$$\div\!\div a : a(1+r) : a(1+r)^2 : a(1+r)^3 : a(1+r)^4 : \text{ec.},$$

di cui il quoziente è $1+r$, ed il termine generale

$$a(1+r)^n=A,$$

il numero n indicando quello degli anni decorsi dall' istante dell' imprestito.

Sia, per esempio, la quota del frutto al 5 per 100, vale a dire che per 100 lire prestate per un anno debbasi rendere 105 lire: abbiamo dunque

$$100r=5, \text{ oppure } r=\tfrac{5}{100}=\tfrac{1}{20}, \text{ e } 1+r=\tfrac{21}{20}.$$

Se si volesse sapere ciò che diviene la somma a, abbandonata, così come suol dirsi, per 25 anni, avrebbesi allora

$$n=25, \qquad \text{ed} \qquad a\left(\frac{21}{20}\right)^{25}$$

in vece della somma primitiva. La 25.ma potenza di $\frac{21}{20}$ valutasi prontamente per mezzo dei logaritmi, poichè si ha (252)

$$\mathrm{l}\left(\frac{21}{20}\right)^{25}=25\,\mathrm{l}\tfrac{21}{20}=25\,(\mathrm{l}21-\mathrm{l}20)=0,5297322;$$

il che somministra

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{25}=3,386 \quad \text{incirca}, \qquad A=3,386a;$$

e da ciò si fa manifesto che 1000 lire prestate nel modo indicato diverrebbero 3386 lire alla fine di 25 anni comprendendovi i frutti, ec.

Se il cambio durasse 100 anni, troverebbesi

$$A=a\left(\frac{21}{20}\right)^{100}=131a$$

incirca; così 1000 lire produrrebbero, dopo questo spazio di tempo, una somma di 131000 lire circa. Questi esempî dimostrano con quale rapidità i fondi si aumentano per l' accumulazione degli interessi composti.

258. L' equazione

$$A=a(1+r)^n$$

dà luogo a quattro problemi: il primo, conoscendo a, r, e n, trovare A, si presenta ogni qualvolta si cerca ciò che diviene il capitale dopo un numero n di anni; io ne ho dato poc' anzi un esempio.

Il secondo, conoscendo a, A, e n, trovare r, conduce a conoscere la quota del frutto per mezzo della somma primitiva, di quella che è stata rimborsata, e del tempo che l'imprestito ha durato; si ha in questo caso

$$1+r=\sqrt[n]{\frac{A}{a}}.$$

Il terzo, conoscendo A, r, e n, trovar a, e pel quale si ottiene

$$a=\frac{A}{(1+r)^n},$$

ha per oggetto di determinare il capitale, che bisogna porre a frutto per aver diritto dopo un numero n di anni ad una somma A,

Il quarto, conoscendo A, a, e r, trovare n, non può risolversi che mediante i logaritmi (238, 252). Prendendo quello di ciascun membro dell' equazione proposta si ottiene

$$lA=la+nl(1+r),$$

d' onde

$$n=\frac{lA-la}{l(1+r)}.$$

Con quest'ultimo trovasi in quanti anni il capitale a debba aver prodotto una somma A.

Per darne un esempio, suppongo che si cerchi il tempo, che è necessario perchè la somma primitiva sia raddoppiata, la quota del frutto essendo sempre al 5 per 100; avremo,

$$A=2a,\quad lA=la+l2,$$

ed in conseguenza

$$n=\frac{l2}{l\frac{21}{20}}=\frac{l2}{l21-l20}=\frac{0,3010300}{0,0211893}=14,21$$

all' incirca.

259. Il problema seguente è uno dei più complicati, che si propongano ordinariamente sopra questo argomento. Supponesi che il datore del danaro ponga ciascun anno una nuova somma, che egli unisce al capitale di quest' anno, e ciò per un numero n di anni; si domanda qual' è, alla fine dell' ultimo, l' importare di tutte queste somme cumulate coi loro frutti composti. Sieno a, b, c, d, ...k le somme poste il primo, il secondo, il terzo, il quarto, ec. anno; la somma a restando nelle mani del debitore per un numero n di anni diverrà

$$a(1+r)^n.$$

la somma b, la quale non resta che $n-1$ anni, si cangerà in

$$b(1+r)^{n-1};$$

la somma c data per $n-2$ anni solamente, diverrà

$$c(1+r)^{n-2};$$

e così delle altre; finalmente l'ultima quantità k, la quale non è impiegata che per un anno, non darà che

$$k(1+r):$$

avremo dunque

$$A=a(1+r)^n+b(1+r)^{n-1}+c(1+r)^{n-2}\ldots+k(1+r).$$

Calcolando separatamente ciascun termine del secondo membro, avremo il valore di A.

L'operazione molto si simplifica allorchè

$$a=b=c=d\ldots=k;$$

poichè in questo caso si ha

$$A=a(1+r)^n+a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}\ldots+a(1+r):$$

il secondo membro di quest'equazione forma una progressione per quoziente, il cui primo termine è $a(1+r)$, l'ultimo $a(1+r)^n$, il quoziente $1+r$, e la somma è in conseguenza

$$\frac{a(1+r)^{n+1}-a(1+r)}{r}\ (232):$$

avremo dunque allora

$$A=\frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}.$$

Questa equazione presenta pure quattro Problemi corrispondenti a quelli, che ho enunciati sull'equazione

$$A=a(1+r)^n$$

260. I Fondi che si chiamano *annualità*, sono gl'inversi del precedente; è il debitore, che si libera dal debito di un capitale e suoi frutti con diversi pagamenti fatti in termini egualmente distanti. I pagamenti effettuati dal debitore avanti l'epoca del rimborso posson essere considerati come anticipazioni fatte al creditore in conto di questo rimborso, il valore delle quali dipende dal tempo, che passa tra una di quest'epoche, e l'altra. Così denotando ciascun pagamento per a, il primo pagamento, che ha luogo $n-1$ anni avanti lo spirare dell'ultimo termine, riferito a quest'epoca, equivale necessariamente ad $a(1+r)^{n-1}$; il secondo, riferito all'istess' epoca, non vale che $a(1+r)^{n-2}$; il terzo, $a(1+r)^{n-3}$; e così degli altri fino all'ultimo, il quale non ha che il valore di a. Ma da un altro canto la somma data a cambio essendo rappresentata da A, diverrà nelle mani del debitore, dopo n anni, un capitale $A(1+r)^n$, che dovrà essere eguale a tutte le anticipazioni riunite, che il creditore ha da lui ricevute; avremo dunque

$$A(1+r)^n=a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-3}\ldots+a,$$

ovvero, calcolando la somma della progressione, che forma il secondo membro,

$$A(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r};$$

equazione, nella quale possiamo prendere alternativamente per incognita la quantità A, che io chiamerò *prezzo* dell' annualità, perchè è la somma, che la medesima rappresenta; la quantità a, che è la *quota*, dell' annualità; la quantità r, che è la quota del frutto; e finalmente la quantità n, che esprime la durata dell' annualità. Per trovare quest' ultima, bisogna necessariamente ricorrere ai logaritmi; si ricava in primo luogo il valore di $(1+r)^n$; e si ha

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Ar},$$

e prendendo i logaritmi, si ottiene

$$n\mathrm{l}(1+r) = \mathrm{l}a - \mathrm{l}(a - Ar),$$

da cui ricavasi

$$n = \frac{\mathrm{l}a - \mathrm{l}(a - Ar)}{\mathrm{l}(1+r)}.$$

261. Per mostrare l' uso delle formule segnate qui sopra, io le applicherò al problema seguente.

Trovare qual somma bisogna dare annualmente per estinguere in 12 anni un debito di 100 lire coi suoi frutti per questo tempo, il frutto annuale essendo del 5 per 100.

In questo esempio conosconsi le quantità

$$A = 100, \quad n = 12, \quad r = \frac{1}{20},$$

e si cerca l' annualità a; l' equazione

$$A(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r},$$

essendo risoluta per rapporto alla lettera a, somministra

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Bisogna mettere in quest' espressione i valori delle lettere A, r, e n, e per maggiore facilità calcolare in primo luogo, mediante i logaritmi, la quantità $(1+r)^n$, la quale riducesi a $(\frac{21}{20})^{12}$, e troveremo

$$(\tfrac{21}{20})^{12} = 1,79586.$$

Per mezzo di questo valore otterremo

$$a=\frac{100.\ \frac{1}{20}.\ 1{,}79586}{1{,}79586-1}=\frac{5\ .\ 1{,}79586}{0{,}79586},$$

e calcolando l' ultima espressione, o immediatamente o col mezzo dei logaritmi, troveremo

$$a=11{,}2826.$$

Sarà dunque necessaria un' annualità di 11 l., 28 per estinguere in 12 anni il capitale 100 lire, la quota annuale del frutto essendo del 5 per 100.

262. Maggiori particolarità rispetto a questi Problemi passerebbero i limiti, che mi sono prefissi; osserverò solamente che, per paragonare il valore di più somme per rapporto a quello, che dee pagarle, o riceverle, bisogna ridurle alla medesima epoca, e vale a dire, cercare qual capitale desse darebbero ad una stessa epoca. Un Banchiere, per esempio, deve una somma a pagabile in n anni; per saldare il suo debito dà un effetto, il cui valore è rappresentato da b, e che dee pagarsi tra p anni; riportando la prima somma al momento, in cui egli eseguisce la sua operazione, essa non equivale che ad $\frac{a}{(1+r)^n}$, perchè questa debbe essere considerata come il valore primitivo di un capitale divenuto a dopo n anni; la somma b non equivale, per la ragione medesima, al momento predetto, che a $\frac{b}{(1+r)^p}$: la differenza

$$\frac{a}{(1+r)^n}-\frac{b}{(1+r)^p}$$

esprimerà dunque, secondo che dessa sarà positiva o negativa, ciò che dee dare o ricevere il Banchiere nel regresso del suo cambio; e se questo regresso non potesse pagarsi che tra un numero q di anni, indicando per c il suo valore al momento dell' operazione, diverebbe

$$c(1+r)^q;$$

di maniera che sarebbe equivalente a

$$\left(\frac{a}{(1+r)^n}-\frac{b}{(1+r)^p}\right)(1+r)^q=a(1+r)^{q-n}-b(1+r)^{p-q}$$

Le somme $a,b,\ldots k$, nel n.° 259, sono state tutte ridotte all' epoca, in cui doveva pagarsi la somme A; e nel n.° 260 ciascuno dei pagamenti, come pure la somma A, sono stati riportati all' epoca, alla quale l' annualità doveva terminarsi.

FINE.

AGGIUNTA.

Nota citata nella pagina 117.

Nei num. 66, e 75 ho interpretate le soluzioni negative mediante l'esame dell'equazioni, che esse verificano immediatamente, conforme io n'aveva usato più innanzi; e questo mezzo mi è sempre sembrato esatto, perchè si tratta solamente di far vedere che queste soluzioni hanno un senso ragionevole, poichè desse risolvono dei Problemi analoghi al proposto; ma vi sono spesso più maniere di formare questi Problemi; e la seguente, che mi comunicò il fu Sig. Français, Geometra distinto, Professore della Scuola di Artiglieria di Magonza, mi è sembrata più semplice di quella, che si trova in questi Elementi.

» Egli pensa che si debba allontanare dall'ennunciato del Problema » del n.° 63. l'idea della partenza dei corrieri, col supporli in viaggio fin da un tempo indefinito, e che in conseguenza bisognerebbe » enunciarlo nel modo seguente: *Due corrieri seguendo la medesima » strada nel medesimo senso $C'ABC$* (pag. 104), *dopo che essi » hanno corso ciascuno per un tempo qualunque, uno si trova in A » nel momento che l'altro si trova in B; si conoscono le loro celerità, e la distanza AB: si dimanda in qual punto del loro corso » essi si incontreranno?* »

Quest' enunciato conduce alla medesima equazione che quello del n.° 64; ma » allorchè abbiamo stabilita la continuazione del movimento, la soluzione negativa si spiega senza che sia necessario di cangiare la direzione di uno dei corrieri. Infatti, poichè il lor movimento non ha più avuto principio dai punti A, e B, ma che ambedue prima dell' istante, nel qual si suppongono arrivati a questi » punti, si erano di già mossi nella stessa maniera per un tempo indefinito, andando da C' verso B, è facile concepire che il corriere, che in questo punto è avanti a quello, che allora è in A, il » quale va meno presto, ha dovuto in una cert' epoca trovarsi dietro » a questo, e incontrarlo prima del suo arrivo al punto A. Il segno » — indica allora (come nell' applicazione dell' Algebra alla Geometria) che bisogna prendere la distanza AR' nel senso opposto alla » distanza AR, che si è riguardata come positiva. Il cangiamento da » farsi nell' enunciato, perchè la soluzione negativa divenga positiva, » riducesi a stabilire che i corrieri hanno dovuto incontrarsi prima » di arrivare al punto A, in vece di incontrarsi dipoi ».

Difatto, quando si pone il punto R' tra A, e C', in luogo di porlo tra A, e B, si trova $AB = BR' - AR'$; dal che ne resulta l'equazione $y - x = a$ in luogo di $x - y = a$, la quale si era ottenuta in principio; nè vi è bisogno di cangiare il segno di c, la seconda equazione restando sempre $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$.

Il Signor Français applica, non meno felicemente queste considerazioni al caso del n.° 75, considerando i corrieri come dei mobili sot-

tomessi ad un moto continuo e incominciato fino ad un tempo indefinito. Esso enuncia il Problema in questo modo: » *Due mobili si muo-* » *vono uniformemente sulla medesima retta CB* (pag. 115), *uno* » *nella direzione BC, l' altro nella direzione CB, con delle cele-* » *rità date; quello, che muovesi nel primo senso, si trova in B un* » *numero cognito di ore prima che l' altro sia pervenuto in A: si* » *dimanda in qual punto della retta indefinita BC si farà il lo-* » *ro incontro?*

» La soluzione $x = -48$ miglia vuol dire che i due mobili si sono » incontrati nel punto R prima che quello, il quale va da C verso B, » fosse arrivato al punto A; e che il secondo, il quale va da B a C, » fosse nel punto C, dove si trova quando l' altro è nel punto A. »

La posizione assegnata al punto R si verifica osservando che ne resulta $AC = BC - AB = cd - a$, in luogo di $a + cd$, che si era ottenuto in principio (pag. 115), ed in conseguenza $\frac{x}{b} = \frac{cd - a - x}{c}$; equazione, la quale dà $x = 48$.

In questa maniera non vi è alcun rovesciamento da fare nel senso del moto: in verità le circostanze materiali del Problema sono cangiate: e come io l' ho detto più alto, ciò prova che esistone più Problemi fisici corrispondenti alle medesime relazioni matematiche; ma gli enunciati qui sopra esposti hanno il vantaggio di non ferire la legge di continuità, e si avvicinano così alla considerazione delle linee, la quale dipinge nella maniera la più semplice, e la più generale le circostanze del cangiamento dei segni delle grandezze. (Vedete il *Trattato elementare di Trigonometria e di Applicazione dell' Algebra alla Geometria.*)

Napoli 6 Maggio 1834.

Presidenza della Giunta per la Pubblica Istruzione.

Vista la dimanda del Tipografo Raffaello di Napoli, con la quale chiede di voler ristampare il libro intitolato *Lacroix Algebra*.

Visto il favorevole parere del Regio Revisore Signor D. Andrea Ferrigni;

Si permette che l'indicato libro si stampi, però non si pubblichi senza un secondo permesso, che non si darà se prima il Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuta nel confronto uniforme la impressione all'Originale approvato.

Il Presidente
M. COLANGELO.

Pel Segretario Generale, e membro della Giunta
Gaspare Selvaggi.

LIBRI DI MATEMATICA

Vendibili nello stesso Negozio.

Alberti Istruzione pratiche per l'Ingegniero civile o sia perito agrimensore, e perito d'acque in 4. Venezia. 2 40

Bossut Corso di Matematica tradotto da Mazzoni, 2 vol. 8. 1 20

Boucharlat Elementi di Calcolo differenziale, ed integrale. Terza edizione Napoletana tradotta da F. de Luca in 8. 1 60

—— Teoria delle curve, e delle superficie del secondo Ordine, preceduta da principî fondamentali della Geometria Analitica: Prima traduzione italiana ed arricchita di Note da T. Mandoj, Napoli 1834. 1 60

Caravelli Elementi di Aritmetica in 8. » 25

—— Elementi di Geometria Piana in 8. Napoli 1823. » 45

Dupin Geometria e Meccanica delle arti e mestieri, e delle belli arti ad uso degli artieri ed operaî, dei sotto capi e capi di officî e di manifatture tradotto da G. Laderchi, 3 vol. 8. Bologna 1829. 4 80

Lacroix Trattato elementare di Aritmetica in 12 Nap. 1831. » 40

—— Elementi di Algebra seconda edizione Napoletana in 8. Napoli 1834. 1 00

Legendre Elementi di Geometria Piana, Solida, e Trigonometria, prima edizione Napoletana fatta sull' ultima di Parigi con note di T. Mandoj vol. 3 in 8. Napoli 1831. 1 40

Marrano Elementi di Aritmetica seconda edizione con note di Tommaso Mandoj in 8. Napoli 1833. » 30

—— Elementi di Geometria Piana nuova edizione con note in 8. Napoli 1833. » 45

—— Elementi di Geometria Solida nuova edizione con note in 8. Napoli 1833. » 35

Martino Nuove istituzioni d'Aritmetica Pratica in 8. Napoli 1832. » 30

Milizia Opere complete risguardanti le belle arti 9 vol. 8. Bologna. 14 00

Si vendono separatamente.

Opuscoli diversi risguardanti le belle arti in 8. 1 50
Dizionario delle belle arti del disegno 2. vol. 8. 3 60
Memorie degli Architetti antichi e moderni 2 vol. 3 60
Principii di Architettura civile con note ed aggiunte importantissime 3 vol. 8. 4 80
Saggio di architettura civile e lettere risguardanti le belle arti, 8. 1 20

TACCANI Geometria descrittiva ad uso degli artisti, che contiene la declinazione geometrica e prospettiva degli oggetti, e l'arte di ombreggiarli 1 vol. in 4. ed uno di tavole disegnate ed incise dall'Autore, Milano 1813. 2 40

XIMENES I sei primi elementi della Geometria Piana, a cui si aggiunge alcun saggio de' molti usi che le proposizioni elementari somministrano alla fisica, meccanica, astronomia, ed altre parti della Matematica in 8. Venezia. » 60